NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ,

SEV

De Additione Fractionum:

PETRI MENGOLI

Art. & Phil. Doct.

Illuſtriſsimis, & Sapientiſsimis

CIVITATIS BONONIÆ

SENATORIBVS.



Bononiæ, ex Typographia Iacobi Montij.

Superiorum permiſſu. 1650.

Digitized by Google

Digitized by Google

ILLVSTRISSIMI PATRES

VEreor quin veſtris auribus, Patres Ampliſs. conſona hęc numerorū congeries diſſonare videatur: at innumeris meritis innumeram numerorum ſeriem deberi quis deneget? Arenas maris, ſtellarum numerum, niuis exagonæ multitudinem examinandam contemnerē, dum veſtræ fiſus humanitati infinitum metiri minimè dubitaui. Fronti nunquam melior ſucceſsit ſudor, calamus potiori nunquam vndauit atramento, eo quod veſtro nomini, meo veluti numini conſecratur. Hæ meæ quæquæ ſint, integritatis fractiones, quia minimæ ſunt quantitatis, ipſum munus exile profitentur; quia verò in ſingulis diſpoſi-

Digitized by Google

tionibus infinitæ colliguntur, veſtræ non minus humanitatis, quàm obſequij mei numerant argumenta. Veſter labor eſt, Patres Illuſtriſs. dum meis lucubrationibus munificentiſsimo imperio laboraſtis: veſter, inquam, labor eſt, cui veſtri cætus, noſtrique ſæculi Apollo ampliſsimæ lucis impendium erogauit. Spinoſa hæc Matheſeos dumeta è rigidis acutiſsimæ artis ſpinis verecundiæ meæ roſas collecturi reſpicere ne dedignemini. Valete.

Illuſtriſs. DD. VV.

Seruus humillimus
Petrus Mengolus.

Digitized by Google

PRÆFATIO

MEditanti mihi perſæpe Archimedis parabolæ Quadraturam, propterquam infinita triangula in continuè quadrupla proportione exiſtentia certos limites quantitatis non excedunt; occurrit vniuerſalis illa Quadratura eiuſdem argumenti occaſione a Geometris demōſtrata, qua magnitudines infinitæ continuam quamlibet proportionem maioris inæqualitatis poſſidentes in præfinitas homogeneas quantitates colliguntur. Admirabile ſanè Theorema: cuius contemplatione in eam quæſtionem inductus ſum, vtrum magnitudines eæ quacunq; lege diſpoſitæ, vt aliqua poſsit aſſumi minor qualibet propoſita, vel vt deficientes in infinitum euaneſcant, infinitæ compoſitæ omnem propoſitam quantitatem valeant ſuperare.

In huiuſmodi cauſæ experimentū Arithmeticas fractiones tētare agreſſus, eas ità diſpoſui, vt ſingulas vnitates ſingulis poſt vnitatem nu-

meris

Digitized by Google

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$

meris denominarem, in qua quidem diſpoſitione ſumi poteſt magnitudo minor qualibet aſsignata, & propterea ipſa magnitudines ad ordinis incrementum quantitate decreſcentes in infinitum euaneſcunt.

Cauſam igitur in aſſumpta diſpoſitionis terminis proponens quarebam, vtrum vnitates denominata ſingulis numeris poſt vnitatem in infinitum diſpoſita, & aggregata infinitam aliquam, vel finitam componerent extenſionem. Pro finita extenſione reſpondendum videbatur; quòd numerorum, & fractionum contraria ſint poteſtates, numerorum quidem in multiplicatione, qua magnitudines verſus infinitum progrediuntur, fractionum verò in diuiſione, qua res ad ipſa indiuiſibilia reducitur: aggregati autem numeri ſuperant quamlibet propoſitam quantitatē; ergo à contrario ſenſu aggregata fractiones non videntur poſſe quamlibet propoſitā magnitudinem excedere. Hoc ſophiſma toto ferè menſe fuit expectatio-

nis

Digitized by Google

nis argumentum, quòd pro hac parte Geometricam in cauſa ferre poſſem ſententiam: atqui dum proceſſum demõſtrationis examino, iudicium in alterius partis fauorem conuertitur.

Ea eſt ratio, quia in propoſitis fractionibus æquales magnitudines numeris Arithmeticè diſpoſitis denominantur, & propterea tres conſequentes, vtpote A, B, C, ſunt Harmonicè diſpoſita, & A, ad C, eamdem habet proportionem, quam exceſſus, A, B, ad exceſſum B, C: eſt autem A, maior C; ergo exceſſus A, B, maior eſt exceſſu B, C; & aggregatum A, C, maius duplo B; & aggregatum externis A, B, C, maius triplo media B. Hoc igitur argumento fractiones in propoſita diſpoſitione ſumpta terna à prima ſunt maiores

A	B	C
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\quad \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\quad \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\quad \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\quad \frac{1}{14}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16}$

triplis medijs: & media ſunt vnitates denominata numeris à ternario multiplicatis $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$; *& earumdem tripla ſunt* 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, *quæ eodem, quo ſuprà argumento terna ſunt*

ma-

maiores triplis medijs. Ergo fractiones propoſitæ diſpoſitionis aſſumptæ totidem ſemper ſecundum numeros proportionis continuè ſubtriplæ 3, 9, 27, 81, ſingulas vnitates excedunt. Poſſunt autèm ſumi, pro quouis aſsignato numero, totidem in continua proportione ſubtripla numeri à ternario, iuxtà quorum aggregatum ſumptæ fractiones diſpoſitionis propoſitæ ipſum aſsignatam numerum ſuperabūt: Ergo propoſitæ fractiones in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ infinitam extenſionem valent implere.

Sit exempli gratia numerus aſsignatus 4: & ſumantur à ternario quatuor continuè proportionales in ſubtripla 3, 9, 27, 81, quorum ſumma 120: igitur ſumptæ fractiones in multitudine numeri 120 ſuperant aſsignatum numerum 4; nam tres primæ ſuperant triplum $\frac{1}{3}$*, videlicet vnitatem: nouem deinceps ſuperant triplum aggregati* $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$*, videlicet aggregatum* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$*; ſed huiuſmodi aggregatum ſuperat vnitatem, vt oſtendi; ergo nouem deinceps ſuperant vnitatem: & propter eamdem*

dem demonſtrationem 27, & 81 ſubſequentes ſingulas vnitates excedunt.

Hinc duo Corollaria proceſſere. Primum, quòd eadem diſpoſitio à quocunque ordinetur principio in infinitum extenditur; vtpote ſi diſpoſitarum fractionum prima ſit $\frac{1}{5}$, *& alia deinceps adhuc ipſam diſpoſitionem propoſitum*

$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{8}\quad\frac{1}{9}\quad\frac{1}{10}\quad\frac{1}{11}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{13}\quad\&c.$$

quemuis numerum ſuperare poſſe: finitum enim eſt aggregatum ex ijs, quæ ſunt omiſſa $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, *& finiti ab infinito ſubſtractio finitum relinquere non poteſt.*

Alterum, quòd infinitarum fractionum diſpoſitio, in qua ſingulæ vnitates a ſingulis numeris Arithmeticè proportionalibus denominantur, pariter in infinitum extenditur. Fiat huiuſmodi diſpoſitio A, cuius primam fractionem denominet numerus B, & exceſſus Arithmeticè proportionalium ſit C, & ſub ſingulis fractionibus diſpoſitionis A, ab eodem principio fiat diſpoſitio D, fractionum, in quibus vnitates denominantur omnibus numeris

à B.

A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{14}$	B 2.
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	C 3.

à *B. Quia primi denominatores in diſpoſitionibus A, D, ſunt æquales, alter minor eſt quàm vt ad alterum eamdem habeat proportionem, quam C, ad vnitatem; & colligendo ſecundus in diſpoſitione A, minor eſt quàm vt ad ſecundum in diſpoſitione D, eamdem habeat proportionem: ſunt autèm fractiones eumdem habentes numeratorem in reciproca proportione denominatorum; ergo prima, ſecunda, & ſingula deinceps fractiones diſpoſitionis D, ſunt minores quàm vt ad primem, ſecundam, & ſingulas deinceps diſpoſitionis A, eamdem habeant proportionem, quam C, ad vnitatem; & colligendo, tota diſpoſitio D, minor eſt quàm vt ad totam diſpoſitionem A, eamdem habeat proportionem, quam C, ad vnitatem. Igitur ſi extenſionis A, quantitas aſsignatur; etiam eiuſdem extenſionis multiplam ſecundum numerum C, quantitatem neceſſe eſt aſsignari, quæ infinita extenſione D, ſit*

maior;

Digitized by Google

maior; quod eſt abſurdum, Ergo extenſio infinitarũ fractionũ diſpoſitionis A, eſt infinita.

Dimiſsis igitur hiſce diſpoſitionibus quantitatis iuriſdictionem ſuperantibus, eamdem contemplationem inſtituere capi de fractionibus, in quibus vnitates à numeris triangulis denominantur; an videlicet ipſæ etiam quadraturam excluderent, an potius paterentur: Factis ergo de more calculis, & inſtructa demonſtratione, inueni diſpoſitionis huiuſmodi quadraturam eſſe vnitatem:

Vnitates denominatæ triangulis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$
quæ aggregatæ à prima ſunt.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{9}$

quòd aggregatæ quotlibet à prima ſunt æquales numero multitudinis ipſarum denominato per numerum binario maiorem, & propterea ſemper vnitate ſunt minores eo defectu, qui iuxtà multitudinis additarum fractionum incrementum infrà quãlibet aſsignatam magnitudinẽ diminuitur, & in infinitũ euaneſcit.

Præterea in eadem diſpoſitione bina ſumpta poſt vnitatem ſingularum ab vnitate ſunt di-

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\qquad \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}\qquad \frac{1}{21}\ \frac{1}{28}\qquad \frac{1}{36}\ \frac{1}{45}$$

$$\frac{1}{2}\qquad\qquad \frac{1}{6}\qquad\qquad \frac{1}{12}\qquad\qquad \frac{1}{20}$$

midia: ergo diuidendo, omnes poſt vnitatem, vnitati ſunt æquales.

Tandèm ſi eiuſdem diſpoſitionis fractiones

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\qquad \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{28}\qquad \frac{1}{36}\ \frac{1}{45}\ \frac{1}{55}\ \frac{1}{66}\ \frac{1}{78}\ \frac{1}{91}\ \frac{1}{105}\ \frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{2}\qquad\qquad \frac{1}{4}\qquad\qquad \frac{1}{8}$$

totidem ſumantur deinceps ſecundùm numeros proportionis continuè ſubduplæ à binario, videlicet 2, 4, 8, &c. aggregata ſunt in continuè dupla proportione; atqui magnitudines duplæ proportionis aggregata infinita ſunt æquales duplo primæ, cum in noſtro caſu prima ſit dimidium vnitatis, ergo propoſitæ fractiones aggregatæ infinitæ ſunt æquales vnitati.

Huiuſmodi ſunt, quæ in primo præſentis opuſculi libro demonſtraui de fractionibus, in quibus vnitates denominantur planis omniũ numerorum ab vnitate: quia enim ſinguli trianguli numeri ſingulorum huiuſmodi planorum ſunt dimidij, propter reciprocam pro-

por-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$
	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$

portionem ſingulæ fractiones, in quibus vnitates denominantur triangulis duplæ ſunt ſingularum, in quibus denominantur planis; & ideò vtrique diſpoſitioni eadem conueniunt demonſtrationes.

Ab huius fractionum diſpoſitionis contemplatione fæliciter expeditus, ad aliam progrediebar diſpoſitionem, in qua ſingulæ vnitates numeris quadratis denominantur. Hæc ſpeculatio fructus quidem laboris rependit, nondùm tamen effecta eſt ſoluendo, ſed ingenij ditioris poſtulat adminiculum, vt præciſam diſpoſitionis, quam mihimetipſi propoſui, ſummam valeat reportare.

Pro fructibus habẽtur huius opuſculi Theoremata, ea præcipuè, quæ in primo libro demonſtrantur, & præterea ſequentes propoſitiones videlicet.

1. Vnitates denominatæ compoſitis ex qua-

dratis

dratis ab vnitate, & lateribus eorumdem, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales vnitati.

Quadrati	1	4	9	16	25
Latera	1	2	3	4	5
Compoſiti	2	6	12	20	30
Vnitates denominatæ compoſitis.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$

Conſtat enim, quòd ſingulæ fractiones huiuſce diſpoſitionis congruũt ſingulis, in quibus vnitates denominantur planis omnium numerorum ab vnitate.

2. Vnitates denominatæ compoſitis, ex quadratis ab vnitate, & lateribus eorumdem duplis, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales $\frac{3}{4}$

Quadrati	1	4	9	16	25	36
Laterũ dupli	2	4	6	8	10	12
Compoſiti	3	8	15	24	35	48
Vnitates denominatæ compoſitis.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{48}$

Quia ſingulæ, quæ ſumuntur alternæ à prima, congruunt ſingulis, quæ denominantur planis

omnium

Digitized by Google

omnium imparium ab vnitate, & ideò ſunt æquales $\frac{1}{4}$. Alternæ verò à ſecunda congruunt ſingulis, quæ denominantur planis omnium parium à binario, & propterea ſunt æquales $\frac{1}{4}$. Ergo colligendo, omnes ſunt æquales $\frac{1}{2}$.

3. Vnitates denominatæ compoſitis ex quadratis ab vnitate, & lateribus eorumdem triplis diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales $\frac{11}{18}$.

Quadrati	1	4	9	16	25
Laterum tripli	3	6	9	12	15
Compoſiti	4	10	18	28	40
Vnitates denominata compoſitis.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{40}$

Quia ſumptæ à prima binis relictis congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate cũ exceſſu 3, & propterea aggregatæ infinitæ ſunt æquales $\frac{1}{3}$: Sumptæ autem à ſecunda binis relictis congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum à 2, cum eodẽ exceſſu 3, & ſunt æquales $\frac{1}{6}$; Reſiduæ tandem congruunt vnitatibus, quæ denominantur

planis

planis Arithmeticè diſpoſitorum à 3. cum eodem exceſſu 3, & ideò ſunt æquales $\frac{1}{9}$. Ergo omnes equales ſunt aggregatis $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{9}$, videlicet $\frac{11}{18}$.

Et alia huiuſmodi Theoremata, eadem pariter methodo demonſtraui.

Ad propoſitam ergo Queſtionē redeo, cuius plura capita contrarias, vt oſtendi, merentur ſententias. Iſtorum autem duo ſolumodo in hoc opuſculo mihi videor abſoluiſſe; alterum de fractionibus, in quibus vnitates denominantur productis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum; alterum de ijs, in quibus differentiæ diſpoſitorum quomodolibet numerorū eorumdem productis denominantur: præterea eadem in Geometricis quantitatibus demonſtrari poſſe indicaui, præuia ſolumodò nominum interpretatione, quæ habetur in vltimis definitionibus libri tertij.

In aſſumptis autem capitibus quid queſtioni reſpondendum ſit, ex ſequentibus vnuſquiſque poterit indicare.

NOVÆ

Digitized by Google

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ SEV De Additione Fractionum.

LIBER PRIMVS.

In quo tractatur de Fractionibus, quarum ſunt denominatores numeri plani.
Principales Additiones habentur in Propoſitionibus huius libri 7. 8. 13. 23. 37.
Quadraturæ verò in Propoſitionibus 17. 26. 40.

DEFINITIONES

I.

Differentiam duarum magnitudinum, quandò prima excedit ſecundam, voco, exceſſum primæ & ſecundæ.

II.

Quandò verò prima deficit à ſecunda, voco, defectum primæ, & ſecundæ.

Digitized by Google

III.

Similes differentias, voco, tùm exceſſus, tùm defectus inter ſe.

IV.

Diſsimiles verò exceſſus defectibus.

V.

Magnitudines Arithmeticè diſpoſitas, voco, quarum (ſumptis continuè binis quibuslibet) differentiæ ſimiles antecedentium, & conſequentium ſunt æquales.

VI.

Magnitudines Harmonicè diſpoſitas, voco, quarum (ſumptis continuè ternis quibuſlibet) prima ſe habet ad tertiam, vt differentia primæ, & ſecundæ ad ſimilem differentiam ſecundæ, & tertiæ.

Præterea ſuppono Lectorem informatum eſſe de ijs, quæ in Quinto, Septimo, Octauo, & Nono libris Elementorum Euclidis traduntur, quoad capeſcendas demonſtrationes. Nam, quoad ipſas propoſitiones, & praxim numeroſam, ſufficit memoriæ mandaſſe præcepta logiſticæ Fractionum, quæ paſſim penes Arithmeticos leguntur.

Theo-

Digitized by Google

Theorema I. Propoſitio I.

Trium Arithmeticè diſpoſitorum planum ſub extremis medium eſt Harmonicè inter plana ſub ſingulis extremis, & medio.

A. 3.	B. 5.	C. 7.
	D. 2.	
H. 6.		I. 14.
E. 15.	G. 21.	F. 35.

SInt Arithmeticè diſpoſiti tres A, B, C, quorum differentia D, & planum extremorum A C, ſit G, plana verò ſub ſingulis extremis, & medio A B, C B, ſint E, F. Dico quòd G, medium eſt Harmonicè inter E, F. Ex multiplicationibus D A, D C, producantur H, I; ergo vt A, ad C, ita eſt H, ad I: & quia E, F, ſunt plana B A, B C; ergo E, ad F, eſt vt A, ad C, vel vt H, ad I: quoniam A, multiplicando B, C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam B, C, producit ſimilem differentiam E, G; & multiplicando D, producit H; eſt autem D, differentia B, C; ergo H, eſt differentia E, G, ſimilis differentiæ B, C, vel differentię A, B: Similiter demonſtrabimus quòd I, eſt differentia G, F, ſimilis differentiæ A, B, vel E, G: ergo E, ad F, eſt vt differentia E, G, ad ſimilem differentiam G, F. Ergo G, medium eſt Harmonicè inter E, F. Quod erat demonſtrandum. Def. 6.

Digitized by Google

Theorema 2. Propoſ. 2.

Trium Harmonicè diſpoſitorum planum ſub extremis medium eſt Arithmeticè inter plana ſub ſingulis extremis, & medio.

A, 3		B. 4.		C. 6.
	H. 1.		I: 2.	
		D. 6.		
E. 12.		G. 18.		F. 24.

SInt Harmonicè diſpoſiti tres A, B, C, & planum extremorum A C, ſit G, plana verò ſub ſingulis extremis,& medio A B, C B, ſint E, F. Dico quòd G, medium eſt Arithmeticè inter E, F. Sint H, & I, differentiæ ſimi-
Def. 6. les A,B,& B, C; ergo vt A, ad C, ita eſt H, ad I, & productum A I, eſt æquale producto C H. Sit huiuſmodi productum D: quoniam A, multiplicando B, C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam, B, C producit ſimilem differentiam E, G; & multiplicando I, producit D; eſt autem I, differentia B, C; ergo D, eſt differentia E, G, ſimilis differentiæ B, C, vel A, B: Similiter demonſtrabimus quòd D eſt differentia G, F, ſimilis
Def. 5. differentiæ A, B, vel E, G: ergo differentiæ E, G, & G, F, ſunt æquales, & ſimiles. Ergo G, medium eſt Arithmeticè inter E, F. Quod, &c.

DEFINITIO VII.

Vnam magnitudinem altera denominatam, voco, quamlibet fractionem, in qua vna

ma-

Digitized by Google

magnitudo ſtat loco numeratoris, altera verò loco denominatoris.

Theor. 3. Propoſ. 3.

Eadem magnitudine tribus Harmonicè diſpoſitis denominata fiunt fractiones Arithmeticè diſpoſitæ.

	A. 1.	
B. 3.	C. 4.	D. 6.
E. $\frac{1}{3}$	F. $\frac{1}{4}$	G. $\frac{1}{6}$
H. 12.	K. 18.	I. 24.

DEnominetur A, magnitudo tribus Harmonicè diſpoſitis B, C, D, vt fiant fractiones E, F, G. Dico, quòd E, F, G, ſunt Arithmeticè diſpoſitæ. Ex multiplicationibus C B, C D, B D, producantur H, I, K; ergo, quia B, C, D, ſunt Harmonicè diſpoſiti, K, medius eſt Arithmeticè inter H, I: & quia I, K, ſunt producti D C, D B; ergo I, ad K, eſt vt C, ad B; & ex denominatione A, per C, & B, fiunt fractiones F, & E; ergo vt C, ad B, vel vt I, ad K, ita eſt E, ad F: Similiter demonſtrabimus, quòd vt K, ad H, ita eſt F, ad G; ergo per conuerſionem rationis, & ex æquo vt I, K, H, ſunt Arithmeticè diſpoſiti, ſic fractiones E, F, G, ſunt Arithmeticè diſpoſitæ. Quod, &c.

DEFINITIO VIII.

Defferentias, & plana in aliqua diſpoſitione,

voco

Digitized by Google

voco abſolutè, differentias, & plana magnitudinum, quæ ſunt continuè conſequentes in illa diſpoſitione, prima videlicet, & ſecunda; ſecunda, & tertia; & ſic deinceps vſque ad vltimam, ſi diſpoſita ſunt in aliqua multitudine; vel in infinitum, ſi diſpoſita concipiuntur infinita.

Theor. 4. Propoſ. 4.

Factis duabus diſpoſitionibus, prima quidem omnium numerorum ab vnitate, ſecunda verò omnium numerorum, quos aſſumptus aliquis numerus metitur ab aſſumpto; Vnitates denominatæ planis in prima, ad vnitates denominatas planis in ſecunda, ſingulæ ad ſingulas eiuſdem ordinis, ita ſe habent, vt aſſumpti numeri quadratus ad vnitatem.

A.	1.		2.		E. 3.		4.		5.		6.		7.		8.
B.		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$	
C.	3.		6.		F. 9.		12.		15		18.		21.		24.
D.		$\frac{1}{18}$		$\frac{1}{54}$		$\frac{1}{108}$		$\frac{1}{180}$		$\frac{1}{270}$		$\frac{1}{378}$		$\frac{1}{504}$	

Sit

SIt omnium numerorum ab vnitate diſpoſitio A, & aſſumptus numerus E, cuius quadratus F; & ſit omnium numerorum, quos E, metitur ab E, diſpoſitio C; Sint etiam B, vnitates denominatæ planis in A; & D, vnitates denominatæ planis in C. Dico, quòd ſingulæ B, ad ſingulas D, eiuſdem ordinis, ita ſe habent, vt F, ad vnitatem. Quia numerus E, & vnitas æquè metiuntur numeros in C, & A, eiuſdem ordinis, vt ſinguli in C, ad E, ita ſinguli eiuſdem ordinis in A, ad vnitatem, & ſunt E, & vnitas homologæ ordinis eiuſdem numeris in A, & C; conuertendoque, & ex æquo binæ C, inter ſe ſunt vt binæ A, inter ſe, ſi ſumantur homologæ ordinis eiuſdem: ergo plani denominatores in ſingulis D, ad planos denominatores in ſingulis eiuſedm ordinis B, ſunt ſimiles, & duplicatam habent proportionem homologorum laterum videlicet numeri E, ad vnitatem, vel eamdem quã numerus F, ad vnitatem; ſed vt denominatores D, ad B, inter ſe, ita reciprocè ſunt vnitates denominatæ B, ad D, inter ſe: Ergo ſingulæ B, ad ſingulas eiuſdem ordinis D, ſunt vt F, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 5. Propoſ. 5.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima.

SIt A, ſeries omnium numerorum ab vnitate, & B, ſint vnitates denominatæ planis in A. Dico, quòd binæ B, à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima. Sit C, ſeries omnium numerorum à binario, quos binarius metitur,

Digitized by Google

A.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
B.		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$
C.		2.		4.		6.		8.
D.			$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{48}$	

Prop. 4. titur; & D, ſint vnitates denominatæ planis in C; ergo ſingulæ B, à prima ad ſingulas D, à prima ſunt vt 4. binarij quadratus ad vnitatem: & quoniam in A, ſunt omnes numeri ab vnitate, ſunt inter numeros A, à binario, qui eſt ſecundo loco, omnes C, à primo, interpoſitis tamen ſingulis Arithmeticè medijs, quos binarius non metitur; ergo ſinguli plani denominatores vnitatum D, à prima medij ſunt Harmonicè inter binos denominatores B, à ſecunda; ergo ſingulæ D, à prima mediæ ſunt Arithmeticè inter binas B, à ſecunda; & propterea ſingulæ D, à prima ad binas B, à ſecunda ſunt dimidiæ, videlicet, vt vnitas ad 2: Ergo ex æquo ſingulæ B, à prima ad binas B, à ſecunda ſunt vt 4. ad 2; & conuertendo binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularũ à prima. Quod, &c.

(Marginal notes: Prop. 1. beside "titur; ergo ſinguli plani…"; Prop. 3. beside "res B, à ſecunda…")

Theor. 6. Propoſ. 6.

Differentia laterum plano denominata eſt diſſimilis differentia vnitatum ſingulis lateribus denominatarum.

SInt latera A, B, quorum differentia C, denominetur plano D, vt fiat fractio E; & denominata vnitate per B, & A, fiant fractiones F, & G; & ſit C, exceſſus A, B. Dico quòd E, eſt defectus F, G. Quia F, eſt vnitas de-

no-

A. 5.	C. 2.	B. 3.
	D. 15.	
F. $\frac{1}{5}$	E. $\frac{2}{15}$	G. $\frac{1}{3}$

nominata per A, ex multiplicatione F A, producitur vnitas; & ex multiplicatione vnitatis, & B, producitur B; ergo ex mutua multiplicatione F A B, producitur B; eſt autem D, planum A B; ergo ex multiplicatione F D, producitur B. Similiter demonſtrabimus, quod ex mluti-plicatione G D, producitur A. Cum igitur ex multiplicationibus G, & F, in D, producantur A, & B; ergo ex multiplicatione exceſſus G, F, in D, producitur exceſſus A, B, videlicet C; Sed quia E, fractio eſt ex denominatione C, per D; ergo etiam ex multiplicatione E, in D, producitur C; ergo E, eſt æqualis exceſſui G, F: ergo E, eſt defectus F, G. Quod, &c.

DEFINITIO IX.

Continuam magnitudinum diſpoſitionem, voco, cum differentiæ antecedentium, & conſequentium ſunt ſimiles.

Theor. 7. Prop. 7.

Differentiæ denominatæ planis in continua diſpoſitione ſimul ſumptæ ſunt æquales vni differentiæ denominatæ plano extremorum.

B Sint

A. 2. B. 4. C. 5. D. 9.

E. $\frac{2}{8}$ F. $\frac{1}{20}$ G. $\frac{4}{45}$

H. $\frac{7}{18}$

I. $\frac{1}{2}$ K. $\frac{1}{4}$ L. $\frac{1}{5}$ M. $\frac{1}{9}$

SInt A, B, C, D, aliquot magnitudines continuæ diſpoſitionis in qua differentiæ planis denominatę ſint fractiones E, F, G, Differentia verò denominata plano extremorum A, D, ſit fractio H. Dico, quòd E, F, G, ſimul ſumptæ ſunt æquales H. Denominentur ſingulæ vnitates lateribus A, B, C, D, vt fiant fractiones I, K, L, M. Quoniam E, eſt differentia denominata plano A B, & I, K, ſunt vnitates denominatæ lateribus A, B; æqualis eſt E, differentiæ, I, K, quæ diſſimilis eſt differentiæ A, B. Similiter demonſtrabimus F, G, H, æquales eſſe differentijs K, L, L, M, I, M, quę ſunt diſſimiles differentijs B, C, C, D, A, D; vnde quia differentiæ in diſpoſitione A, B, C, D, ſunt ſimiles, etiam differentię in diſpoſitione I, K, L, M, ſunt ſimiles; & propterea ſimul ſumptæ ſunt æquales differentiæ I, M, vel fractioni H: Atqui colligendo differentiæ in diſpoſitione I, K, L, M, ſunt ęquales fractionibus E, F, G, ſimul ſumptis. Ergo fractiones E, F, G, ſimul ſumptę ſunt ęquales H. Quod, &c.

Def. 6.

Def. 5.

Theor. 8. Propoſ. 8.

Vnitates denominatæ planis in Arithmetica diſpoſitione ſunt ad vnitatem plano extremorum denominatam vt numerus multitudinis ipſarum ad vnitatem.

Sint

A. 2. B. 5. C. 8. D. 11. N. 3. O. 9.

E. $\frac{1}{10}$ F. $\frac{1}{40}$ G. $\frac{1}{88}$ H. $\frac{1}{22}$

I. $\frac{3}{10}$ K. $\frac{3}{40}$ L. $\frac{3}{88}$ M. $\frac{9}{22}$

SInt A,B,C,D, in Arithmetica diſpoſitione, cuius planis denominatę ſingulę vnitates ſint fractiones E,F, G, & vnitas denominata plano extremorum A D, ſit H. Dico quòd E, F, G, ad H, ſunt vt numerus multitudinis E,F,G, ad vnitatem. Sit N, differentia ſemper eadem in diſpoſitione, quę planis denominetur, vt fiant fractiones I,K,L, & ſit O, differentia extremorum A,D, quę plano denominetur, vt fiat fractio M. Igitur facti ſunt I,K,L, ęquales M. Et quia E, F, G, & I, K, L, eoſdem habent denominatores, numerator verò communis ipſarum E, F, G, eſt vnitas, & factorum I, K, L, eſt N; ergo tùm ſingulæ, tùm collectæ E,F,G, ad I, K, L, vel ad M, ſunt vt vnitas ad N. Pariter quia M, H, eundem habent denominatorem, nnmerator verò M, eſt O, & ipſius H, eſt vnitas; ergo M, ad H, eſt, vt O, ad vnitatem; & ex ęquo in perturbata collectæ E, F, G, ad H, ſunt, vt O, ad N: Cum autem A,B,C,D, ſint Arithmeticè diſpoſiti, eſt O, differentia extremorum ad N, differentiam conſequentium ita multiplex, vt numerus multitudinis E, F, G, ad vnitatem. Ergo E, F, G, ad H, ſunt, vt numerus multitudinis E, F, G, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 7.

Theor. 9. Propoſ. 9.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate ternæ à tertia ſunt pars tertia ſingularum à prima.

A.	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.		9.
B.		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$		$\frac{1}{72}$	
C.					3.						6.						9.
D,								$\frac{1}{18}$						$\frac{1}{54}$			

ORdinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A. Dico ternas B, à tertia, tertiam eſſe partem ſingularum à prima. Ordinentur omnes numeri C, à ternario, quos idem metitur, & D, vnitates denominatæ planis C: Et quoniam A, ſunt omnes numeri, etiam inter numeros A, à ternario, qui eſt tertio loco, ſunt omnes C, à prmo, binis medijs Arithmeticè ſemper interpoſitis, quos ternarius non metitur. Prop. 8. Ergo ternæ vnitates B, à tertia (denominatæ planis quatuor diſpoſitorum Arithmeticè à numeris C, qui ſunt inter numeros A,) ad ſingulas vnitates D, (denominatas planis numerorum C, qui eorumdem quatuor ſemper ſunt extremi) à prima ſunt, vt idem ternarius, numerus videlicet magnitudinum, quæ ternæ ſumuntur ad vnitatem; Prop. 4. Singulæ autem D, à prima ad ſingulas B, à prima ſunt, ut unitas ad 9, quadratum ternarij: Ergo ex æquo ternæ B, à tertia ſunt ad ſingulas B, à prima, ut 3. ad 9. nempe pars tertia. Quod, &c.

Theor. 10. Propoſ. 10.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate, quaternæ à quarta ſunt pars quarta ſingularum à prima.

Prop. 5. NAm quia binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima, binę à quarta ſunt ad ſingulas à ſecunda,

vt

vt vnitas ad 2. & colligendo quaternæ à quarta ſunt ad binas à ſecunda, vt vnitas ad 2. & binę à ſecunda ſunt ad ſingulas à prima, vt vnitas ad 2. vel, vt 2. ad 3. Ergo ex æquo quaternæ à quarta ad ſingulas à prima ſunt vt vnitas ad 4. videlicet pars quarta. Quod, &c.

Eadem huius, & præcedentis demonſtrationum methodo poſſunt ſinguli ſequentis Theorematis caſus demonſtrari, videlicet, Vnitates denominatas planis omnium numerorum ab vnitate quinas à quinta partem eſſe quintam ſingularum à prima, ſenas à ſexta partem ſextam, ſeptenas à ſeptima partem ſeptimam, & ſic deinceps; ex quorum inductione poſtea patefiat ipſius veritas concluſionis: ne tamen ſcrupuloſum Geometram dubitare contingat, generali ſuperinde factæ propoſitioni vnica ſatisfaciam demonſtratione, vt infra.

Theor. II. Propoſ. II.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate ſumptæ totidem ab vna ipſarum ſecundum numerum ordinis eiuſdem, ſunt pars ab eodem numero denominata ſingularum à prima.

ORdinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A, quarum F, aſſumpta, & inter numeros A, ſit eiuſdem F, numerus ordinis E. Dico B, ſumptas ab F, ſemper totidem ſecundum numerum E, partem eſſe denominatam ab E, ſingularum B, à prima. Ordinentur ab E, omnes numeri C, quos E, metitur,

A.	1.	2.	E. 3.	K. 4.	L. 5.	H. 6.	M. 7.	N. 8.	I. 9.
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	F. $\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	
C			3.			6.			9.
D.				$\frac{1}{18}$				$\frac{1}{54}$	

tur, & D, vnitates denominatæ planis numerorum C. Quoniam A, ſunt numeri ab vnitate, ſunt etiam inter numeros A, ab E, qui eſt in eiuſdem ordinis loco, omnes numeri C, à primo, qui ſint E, H, I, interpoſitis totidem ſemper medijs Arithmeticè, ſecundum numerum vnitate minorem E. Sint numeros E,H, interpoſiti K, L, & numeros H, I, totidem interpoſiti M, N, ſecundum numerum vnitate minorem E; Coaſſumptis ergò hinc inde ſemper duobus eorum, quos E, metitur, fiunt ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ numerorum E, K, L, H, & H, M, N, I, totidem ſemper, ſecundum numerum vnitate maiorem E, quarū planis denominatæ vnitates ſunt ipſæ B, ſumptæ totidem ab F, ſecundū numerū E, quæ ad ſin-
Prop. 8. gulas vnitates D, à prima denominatas planis extremorū earūdem diſpoſitionum, qui ſunt numeri C, ita ſe habēt, vt E, numreus multitudinis totidem ſumptarum ab F, ad
Prop. 4. vnitatem; Singulæ autem D, à prima, ad ſingulas B, à prima ſunt, vt vnitas ad quadratum E: ergo ex æquo ſumptæ B, ab F, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad ſingulas B, à prima ſunt, vt E, ad ſuum quadratum; Sed E, cum ſuum quadratum metiatur per ſe ipſum, ſui quadrati pars eſt a ſe ipſo denominata. Ergo ſumptæ B, ab F, ſemper totidem ſecundum numerum E, ſunt pars ab eodem E, denominata, ſingularum B, à prima. Quod, &c.

Theor-

Digitized by Google

Theor. 12. Propoſ. 12.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate, ſumptæ à prima totidem ſemper ſecundum numeros proportionis continuè ſubduplæ ab vnitate ſunt in proportione continuè dupla.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$

VNitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate prima ſit A, duarum ſequentium aggregatum B, quatuor ſequentium aggregatum C, & deinceps totidem huiuſmodi vnitatum ſecundum numeros proportionis continuè ſubduplæ ſumantur aggregata. Dico A, B, C, eſſe in proportione continuè dupla. Quia binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima, B, ſubduplum eſt ipſius A, & eadem ratione, quia quaternæ à quarta ſunt dimidiæ binarum a ſecunda, C, ſubduplum eſt ipſius B, & eadem ſemper demonſtratione, quodlibet aggregatum ſubduplum eſt præcedentis. Ergo conuertendo A, B, C, ſunt in proportione continuè dupla. Quod, &c.

Prop. 5.

Theor. 13. Prop. 13.

Vnitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt æquales numero ipſarum multitudinis denominato per numerum vnitate maiorem.

A. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	D. 8.	E. 9.	
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	

SInt A, numeri ab vnitate, & B, quotlibet vnitates à prima earum, quæ denominantur planis numerorum A. Dico B, aggregatas æquales eſſe numero multitudinis ipſarum B, denominato per numerum vnitate maiorem. Sint D, E, numeri quorum plano denominatur vltima ipſarum B. Et quoniam ſunt diſpoſiti ab vnitate omnes numeri A, quorum conſequentium defectus ſunt ſingulæ vnitates, quæ planis eorumdem denominatæ ſunt B; Igitur B, aggregatæ ſunt æquales defectui extremorum vnitatis, & E, per eorumdem planum denominato. Eſt autem D, defectus vnitatis, & E, & eorumdem planus idem E: Ergo B, ſunt ęquales D, denominato per E. Sed cum numeri A, ſint omnes ab vnitate, numerus E, eſt multitudinis numerorum A, vſque ad E, & D, vnitate minor, quam E, numerus multitudinis ipſarum B. Ergo vnitates B, aggregatæ ſunt ęquales numero ipſarum multitudinis denominato per numerum vnitate maiorem. Quod, &c.

Prop. 7.

Co-

Digitized by Google

Corollarium.

Vnde conſtat, quod vnitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum quotlibet aſſumpta à prima ſunt minores vnitate.

Problema primum. Propoſ. 14.

Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ ſit numeri ad numerum vnitate maiorem.

A. 47.	B. 53.	C. 6.
E. 8	F. 9.	D. 48.

SIt proportio data minoris inęqualitatis A, ad B. Oportet alteram inuenire maiorem proportione A, ad B, quæ ſit numeri ad numerum vnitate maiorem. Sit C, exceſſus B, A, & D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: conſtat D, non eſſe æqualem A; alias C, metiretur etiam A, & metitur ſe ipſum; ergo metiretur compoſitum ex C, A, videlicet B, & non eſſet D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: conſtat etiam D, non eſſe minorem A; quia ſequeretur idem, vel maius abſurdum; ergo D, maior eſt A; & D, ad C, maiorem habet proportionem A, ad C. Sit E, numerus, per quem C, metitur D, & E, auctus vnitate fiat F; ergo D,

Digitized by Google

ad C, eſt, vt E, ad vnitatem; ergo E, ad vnitatem maiorem habet proportionem A, ad C; & componendo E, ad F, maiorem habet proportionem A, ad B; & eſt numerus F, vnitate maior, quàm E. Quod facere oportebat.

Axioma Primum.

Quando infinitæ magnitudines infinitæ ſunt extenſionis, poſſunt in aliqua multitudine ſumi, vt ſuperent quamlibet propoſitam extenſionem.

Theor. 14. Propoſ. 15.

Quando in ordine magnitudinum in infinitum diſpoſitarum, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt minores vna eadem propoſita magnitudine generis eiuſdem, omnes à prima in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt extenſionis finitæ.

A —— —— —— D —— —— ——

SInt in extenſione A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ magnitudines, quarum quotlibet aſſumptæ à pri-

prima ſint minores D, generis eiuſdem. Dico extenſionem A, eſſe finitam: alias erit infinita, & ſumptæ in aliqua multitudine magnitudines diſpoſitæ in A, à prima ſuperabunt quamlibet propoſitam extenſionem D, contra hipotheſim: non eſt igitur A, extenſionis infinitæ, ſed finitæ. Quod, &c. Ax. 1.

Corollarium.

Colligitur ex his quòd vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt extenſionis finitæ. Corol. Prop. 13.

DEFINITIO X.

Magnitudines dicuntur implere propoſitam extenſionem, quando exiſtentes infinitæ ſunt extenſionis minoris propoſitæ; vel quando exiſtentes finitæ, ita ſunt minores propoſitæ, vt vna alia magnitudine adiecta in earumdem ordine continuato proxima, fiant extenſionis maioris propoſitæ.

Axioma Secundum.

Quando infinitæ magnitudines finitæ ſunt extenſionis, & ſingulæ magnitudines eadem

in infinitum concipiuntur in vna, & altera extenſione diſponi, & aggregari, congruit vna extenſio alteri.

Theor. 15. Propoſ. 16.

Quando magnitudines à prima diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt extenſionis finitæ, ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propoſitam extenſionem maiorem quidem prima, minorem tamen extenſione omnium.

A ———— B ———— C ————

SIt A, extenſio finita magnitudinum, quę à prima diſpoſitæ in infinitum,& in ea ſunt aggregatæ,& ſit propoſita extenſio B,maior quidem prima diſpoſitarum in A,minor tamen ipſa extenſione A,& ex magnitudinibus in A, diſpoſitis aſſumpræ à prima, & eodem ordine diſpoſitæ in C, impleant B. Dico, quod aſſumptæ in in C,ſunt in aliqua multitudine: alias aſſumptæ in C, quæ implent B, ſunt infinitæ; igitur in extenſione B, ſunt diſpoſitæ eodem ordine in infinitum, & aggregatæ magnitudines,quæ pariter in extenſione A; & ſunt ambo A, B, extenſiones finitæ; congruit ergo B, extenſioni A, minor maiori; quod eſt abſurdum. Ergo aſſumptæ in C, quæ implent B,non ſunt infinitæ, ſed in aliqua multitudine. Quod, &c.

Ax. 2.

Theor.

Digitized by Google

Theor. 16. Propoſ. 17.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales vnitati.

A ———— B ———— C ————
D ———— ———— E ————

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem eſſe vnitati: alias erit A, maior, vel minor vnitate. Sit maior, igitur in aliqua multi- Prop. 16.
tudine ſumptæ à prima vnitates in A, diſpoſitæ implent vnitatem. Sit huiuſmodi multitudininis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C: ergo aliquot vnitates in A, Def. 10.
diſpoſitæ ſumptę in multitudine numeri C, ſunt maiores vnitate, quod eſt abſurdum. Non eſt igitur A, maior Corol.
vnitate. Sit minor, & data proportione minoris inæ- Prop. 13.
qualitatis A, ad vnitatem, inueniatur altera maior, quæ Prop. 14.
ſit numeri D, ad E, vnitate maiorem; & aliquot vnitates in A, diſpoſitæ ſumantur à prima in multitudine numeri D; quæ cum ſint æquales numero D, denominato Prop. 13.
per E, habebunt ad vnitatem eamdem proportionem, quam D, ad E, maiorem videlicet, quam A, ad vnitatem: Ergo aliquot vnitates in A, diſpoſitæ ſunt maiores omnibus in infinitum diſpoſitis, pars toto; quod eſt abſurdum. Non igitur A, minor eſt vnitate; ſed neque maior. Ergo A, æqualis eſt unitati. Quod, &c.

Aliter.

Aliter.

Prop. 5. QVia binæ vnitatum diſpoſitarum in A, à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima; colligendo, omnes à ſecunda ſunt dimidiæ omnium à prima; & diuidendo, omnes à ſecunda ſunt æquales primæ; eſt autem prima dimidium vnitatis; Ergo omnes à prima ſunt æquales vnitati. Quod, &c.

Prop. 13.

Aliter eadem Methodo.

Prop. 9. QVia diſpoſitarum in A, ternæ à tertia ſunt pars tertia ſingularum à prima; colligendo, omnes à tertia ſunt pars tertia omnium à prima; & diuidendo, omnes à tertia ſunt dimidiæ duarum præcedentium; ſunt autem duæ præcedentes æquales 2. denominato per 3: igitur omnes à tertia ſunt æquales vnitati denominatæ per 3. Ergo colligendo, omnes diſpoſitæ in A, ſunt æquales 3. denominato per 3. videlicet vnitati. Quod, &c.

Prop. 13.

Theor. 17. Prop. 18.

Vnitatum denominatarum planis omniũ numerorum ab vnitate, qualibet aſſumpta, ſumma ſuccedentium in infinitum, & ſumma præcedentium, & aſſumpta ſunt continuè proportionales, vt vnitas ad numerum ordinis aſſumptæ.

Vni-

Digitized by Google

D. 5. E. 6.
C —————— A. $\frac{1}{30}$ B ——————

VNitatum denominatarum planis omnium numerorum ab vnitate ſit A, quęlibet aſſumpta, cuius ordinis numerus D; Sitque B, ſumma ſuccedentium in infinitum, & C, ſumma præcedentium, & aſſumptæ A. Dico A, B, C, eſſe continuè proportionales, vt vnitas ad D. Sit E, numerus vnitate maior D: quia D, eſt numerus ordinis A, eſt etiam numerus multitudinis aggregatarum in C; igitur C, eſt æqualis D, denominato per E; aggregatum vero ex C, B, eſt æquale vnitati; ergo C, ad aggregatum ex C, B, eſt vt D, denominatus per E, ad vnitatem, videlicet vt D, ad E; & diuidendo, C, ad B, eſt vt D, ad vnitatem; quapropter C, ad B, eſt vt D, denominatus per E, ad vnitatem pariter denominatam per E; ergo B, æqualis eſt vnitati denominatæ per E. Quia etiam D, eſt numerus ordinis A; & E, inter omnes numeros ipſi D, proximus vnitate maior; conſtat, quod A, eſt vnitas denominata plano D E; ſed vnitas denominata per E, ad vnitatem denominatam plano D E, eſt vt planum D E, ad E; vel (diuidendo per E,) vt D, ad vnitatem; ergo B, ad A, eſt vt D, ad vnitatem. Sunt ergo continuè proportionales C, B, A, vt D, ad vnitatem; & conuertendo, A, B, C, ſunt continuè proportionales vt vnitas ad D. Quod, &c.

Prop. 13.
Prop. 17.

Theor. 18. Prop. 19.

Factis duabus Arithmeticis diſpoſitionibus prima ab vnitate, altera ab aſſumpto numero,

mero, eorum videlicet numerorum, quos aſſumptus metitur per ſingulos in prima diſpoſitos; vnitates denominatæ planis omnium numerorum primæ, ad vnitates denominatas planis omnium numerorum alterius diſpoſitionis ordinis eiuſdem, ita ſe habent, vt aſſumpti numeri quadratus ad vnitatem.

A. 1.	3.	5.	7.	9.	11.	
D.	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{81}$	
			B. 2.			
C. 2.	6.	10.	14.	18.	22.	
E.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{196}$	$\frac{1}{324}$	
			F. 4.			

SIt diſpoſitio Arithmetica numerorum A, ab vnitate; & B, numerus aſſumptus; à quo ſit diſpoſitio numerorum C, quos B, metitur per numeros A, eiuſdem ordinis; vnitates autem denominatæ planis numerorum A, & C, ſint D, & E; & numeri B, quadratus F. Dico D, ad E, ordinis eiuſdem eſſe, vt F, ad vnitatem. Quia B, metitur numeros C, per A, eiuſdem ordinis, vt ſunt numeri A, ad vnitatem, ita C, eiuſdem ordinis ad B; & ſunt numeri A, & C, ordinis eiuſdem homologi vnitatis, & B; & eadem ratione, vt vnitas ad numeros A, ita B, ad C, ordinis eiuſdem; ergo ex æquo numeri A, inter ſe ſunt vt C, eorumdem ordinum inter ſe; & plani eorumdem ordinum numeris A, & C, contenti ſunt ſimiles; ergo denominatores D, ad eiuſdem ordinis

nis denominatores E, ſunt ſimiles; & duplicatam proportionem habent homologorum laterum vnitatis, ad B; videlicet eamdem, quam vnitas ad F; Ergo D, ad E, ordinis eiuſdem ſunt reciprocè, vt F, ad unitatem. Quod, &c.

Theor. 19. Prop. 20.

Factis duabus Arithmeticis diſpoſitionibus prima ab vnitate, ſecunda vero ab aſſumpto in prima, eorum, quos aſſumptus metitur per ſingulos primæ; Omnes numeri ſecundæ ſunt in prima, totidem ſemper interiectis, quot vnitatum eſt aſſumptus vna dempta.

A. 1	3. B. 5.	7.	9.	11.	13.	
D. 5.	15.	25.	35.	45.	55.	65.
			C. 4.			
E. 4.	12.	20.	28.	36.	44.	52.

SIt diſpoſitio Arithmetica numerorum A, ab vnitate; & inter numeros A, aſſumptus B; à quo fiat diſpoſitio Arithmetica numerorum, quos idem B, metitur per ſingulos A. Dico numeros D, eſſe inter numeros A, totidem ſemper interpoſitis, quot ſunt vnitates in B, vna minus. Sit C, exceſſus B, & vnitatis; & diſponantur numeri E, qui ſint exceſſus binorum D, & A, eiuſdem ordinis. Quoniam B, metitur numeros D, per A, eiuſ-

dem ordinis; eſt vnitas ad B, vt numeri A, ad D; & diuidendo, eſt vnitas ad C, vt numeri A, ad E; igitur E, ſunt multiplices numeri C; & quia C, exceſſus B, & vnitatis magnitudinum, quæ ſunt inter numeros A, vel æqualis eſt, vel multiplex exceſſui conſequentium eorundē A; ergo numeri E, ſunt multiplices exceſſui conſequentium A; & ſunt numeri E, exceſſus numerorum D, A; ergo numeri D, ſunt inter numeros A. Præterea, quia numeri A, metiuntur numeros D, per B; igitur exceſſus conſequentium A, metitur exceſſum conſequentium D, per B; ſed inter extremas mediæ Arithmeticè totidem interponuntur, quoties exceſſus conſequentium exceſſum extremarum metitur vna minus; Ergo numeri D, ſunt inter numeros A, totidem ſemper interpoſitis numeris A, quot ſunt vnitates in B, vna minus. Quod, &c.

Theor. 20. Prop. 21.

Vnitates denominatæ planis numerorũ Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, ſumptæ ſemper totidem ab aſſumpta, quot vnitatum eſt numerus inter Arithmeticè diſpoſitos eiuſdem ordinis cum aſſumpta, ſunt ad ſingulas à prima, vt vnitas ad eumdem numerum.

SInt numeri A, Arithmeticè diſpoſiti ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis numerorum A, qua-

rum

A.	1.	D. 3.	5.	7.	9.	11.
B.	$\frac{1}{3}$	C. $\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{99}$	
E.	3.	9.	15.	21.	27.	33.
F.	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{135}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{1}{567}$	$\frac{1}{891}$	

rum vna C, aſſumpta, & inter numeros A, ſit D, ordinis eiuſdem. Dico B, ſumptas à C, ſecundum numerum D, ad ſingulas eaſdem B, à prima eſſe vt vnitas ad numerum D. Diſponantur Arithmeticè numeri E, à D, quos D, metitur per numeros A, & ſint F, vnitates denominatæ planis numerorum E: conſtat, quod omnes numeri E, ſunt inter numeros A, à D, totidem ſemper interpoſitis ex reliquis numeris A, quot ſunt vnitates in D, vna dempta; ergo numerorum A, inter binos numeros conſequentes E, ſingulæ fiunt arithmeticè diſpoſitiones numerorum, quorum planis denominatæ vnitates B, ſunt à C, totidem ſemper, quot ſunt numeri intermedij vno amplius, videlicet, quot ſunt vnitates in D; & ad ſingulas F, à prima denominatas plano extremorum, qui ſunt E, ſe habent, vt numerus multitudinis earum, quæ totidem ſemper ſumuntur, videlicet numerus D, ad vnitatem: ſunt autem ſingulæ F, à prima ad ſingulas B, à prima, vt vnitas ad quadratum aſſumpti D, ergo ex æquo vnitates B, totidem ſemper ſumptæ à C, ſecundum numerum D, ad ſingulas eaſdem B, à prima ſunt, vt numerus D, ad ſui quadratum, videlicet, vt vnitas ad D. Quod, &c.

Prop. 20.

Prop. 8.

Prop. 19.

Theor. 21. Prop 22.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, ſumptæ à prima ſecundum numeros proportionis continuè ſubmultiplicis ab vnitate, ad numerum ſibi proximum in Arithmetica diſpoſitione, ſunt in eadem continuè multiplici proportione.

A.	1.	B. 3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.
C	1/[illegible]		1/[illegible]	1/[illegible]	1/[illegible]	1/[illegible]	1/[illegible]	1/[illegible]	1/[illegible]	1/[illegible]
D.	1/1	E. 1/3				F. 1/[illegible]				G. [illegible]

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti ab vnitate, quorum B, proximus vnitati; & ſint C, vnitates denominatæ planis numerorum A; & ſegregentur C, vt prima ſit D, & à ſecunda totidem, quot ſunt vnitates in B, ſint E; & aliæ toties totidem ſint F; & quot ſunt F, toties totidem ſecundum numerum B, ſint G, & ſic deinceps: conſtat C, ita ſegregatas eſſe in D, E, F, G, vt ſumptæ ſint ſecundum numeros proportionis continuè ſubmultiplicis ab vnitate ad B. Dico D, E, F, G, eſſe in eadem continuè multiplici proportione numeri B, ad vnitatem.
Prop. 21. Quia B, eſt ſecundo loco Arithmeticè diſpoſitorum, ſingulæ C, à prima ad totidem ſemper ſumptas à ſecunda ſecundum numerum B, ſunt vt B, ad vnitatem; ergo
Prop. 21. D, ad E, eſt vt B, ad vnitatem. Item ſingulæ in E, ad

to-

totidem ſecundum numerum B, ſumptas in F, ſunt vt B, ad vnitatem; & quot ſunt ſingulæ in E, toties totidem ſecundum numerum B, ſunt in F; ergo colligendo omnes E, ad omnes F, ſunt vt B, ad vnitatem. Similiter demonſtrabitur omnes F, ad omnes G, eſſe vt B, ad vnitatem, & ſic deinceps. Ergo D, E, F, G, ſunt in continuè multiplici proportione numeri B, ad vnitatē. Quod, &c.

Theor. 22. Prop. 23.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aggregatæ à prima ſunt æquales numero multitudinis earumdem denominato per productum eiuſdem, & exceſſus diſpoſitionis Arithmeticæ auctum ſemper vnitate.

A. 1. 3. 5. 7. E. 9.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$

D. 4. F. 8.

G. $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{2}{35}$ $\frac{2}{63}$

SInt numeri A, diſpoſiti Arithmeticè ab vnitate, quorum exceſſus B; Sint etiam C, vnitates denominatę planis numerorum A, aſſumptæ à prima ſecundum numerum D; & inter numeros A, poſt vnitatem numeri totidem ſumantur, & ſumptorum ſit extremus E; & ſit F, exceſſus E, & vnitatis: conſtat F, ad B, eſſe ut D, multitudo

titudo numerorum A, poſt unitatem ad ipſam vnitatem: igitur D, multiplicando B, facit F, qui auctus vnitate ſit E. Dico C, æquales eſſe D, denominato per E. Ex denominatione B, per plana numerorum A, vſque ad E, fiant fractiones G, totidem, quot ſunt C. Quia B, eſt exceſſus conſequentium A, & F, extremorum, & E, pla-
Prop. 7. num extremorum, videlicet vnitatis, & E; ſunt G, æquales F, denominato per E: Sunt autem G, ad C, vt B, ad vnitatem; & vt B, ad vnitatem, ita eſt F, ad D, uel F, denominatus per E, videlicet G, ad D, pariter denominatum per E; ergo G, ad C, ſunt ut G, ad D, denominatum per E; ergo C, ſunt æquales D, denominato per E. Quod, &c.

Theor. 23. Prop. 24.

Vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate quotlibet aggregatæ à prima ſunt minores vnitate denominata exceſſu conſequentium diſpoſitionis Arithmeticæ.

C. $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$
B. 2.	D. 4.	E. 8.	F. 9.

SInt C, quotlibet unitates denominatæ planis numerorum arithmeticè cum exceſſu B, diſpoſitorum ab vnitate, ſumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores eſſe vnitate denominata per B. Ex ductu B, in D, fiat E; & F, vnitate maior, quam E; igitur

tur D, ad F, minorem habet proportionem, quam D, ad E; & quia E, productus eſt ex B, in D, ut D, ad E, ita eſt vnitas ad B; ergo D, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad B, & propterea D, denominatus per F, eſt minor vnitate denominata per B: ſunt autem C, æquales D, denominato per F; ergo C, ſunt minores vnitate denominata per B. Quod, &c. Prop. 23.

Corollarium Primum.

Vnde conſtat primo loco vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis. Prop. 15.

Corollarium Secundum.

Patet etiam ſecundo loco, quod vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum. Prop. 16.

Probl.

Probl. 2. Prop. 25.

Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ ſit numeri, quem datus numerus metiatur ad numerum vnitate maiorem.

A. 39 C. 7. B. 43.
D. 10. E. 11. F. 14. G. 15.

DAta ſit proportio minoris inæqualitatis A, ad B, & datus numerus C, opportet alteram proportionem inuenire maiorem data, quæ ſit numeri, quem C, metiatur ad numerum unitate maiorem. Data proportione minoris inæqualitatis A, ad B, maior inueniatur, quæ ſit numeri D, ad numerum E, vnitate maiorem. Si contigerit C, metiri D, conſtat proportionem D, ad E, quæſitam eſſe. Quod ſi C, non metitur D, ſumatur C, toties, donec fiat maior D, & ſit factus F, cui unitate aggregata fiat G. Dico proportionem F, ad G, eſſe quæſitam; quoniam F, maior eſt D, habet F, ad vnitatem maiorem proportionem, quam D; & componendo F, ad G, maiorem, quam D, ad E; ſed D, ad E, adhuc maiorem habet, quam A, ad B; ergo F, ad G, multò maiorem habet, quàm A, ad B: inuenta eſt ergo proportio F, numeri, quem C, metitur ad G, numerum vnitate maiorèm, quæ eſt maior proportione A, ad B. Quod faciendum erat.

Prop. 14.

Theor.

Theor. 24. Prop. 26.

Vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate in infinitum diſpoſita, & aggregata ſunt æquales vnitati denominatæ differentia conſequentium diſpoſitionis Arithmeticæ.

A ———————————— C. $\frac{1}{2}$

B. 2. D. 14. E. 15.

H ——————————— F. 7. G. $\frac{7}{15}$

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quorum differentia B; & ſit C, vnitas denominata per B. Dico A, æqualem eſſe C: alias erit A, maior, vel minor C. Sit maior; igitur in aliqua multitudine ſumptæ à prima unitates diſpoſitæ in A, implent C: ſit huiuſmodi multitudinis numerus D, qui adiecta unitate fiat E; ergo aliquot unitates ex diſpoſitis in A, ſumptæ à prima in multitudine numeri E, ſunt maiores C, quod eſt abſurdum: igitur non eſt A, maior C. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad C, inueniatur altera maior, quæ ſit numeri D, quem B, metiatur ad E, numerum unitate maiorem; metiatur autem B, ipſum D, per F; igitur F, ad D, eſt ut unitas ad B; unitas autem ad B, eſt ut C, ad vnitatem; ergo F, ad D, eſt ut C, ad unitatem; & D, ad E, maiorem habet proportionem A, ad C; ergo ex æquo in perturbata I, ad E, maiorem habet proportionem, quàm A, ad vnitatem. Denominetur I, per E, ut fiat fractio G; ergo vt

Coroll. 2. Prop. 24.

Ax. 1.

Def. 10.

Prop. 24.

Prop. 25.

E eſt

eſt I, ad E, ita G, ad unitatem; igitur G, ad vnitatem habet maiorem proportionem quàm A; ad eamdem vnitatem; ergo G, maior eſt A. Sumantur ex vnitatibus diſpoſitis in A, à prima totidem ſecundum numerum F;
Prop. 23. & ſit aſſumptarum extenſio H: conſtat quòd H, eſt æqualis F, denominato per E, nempe fractioni G; ergo etiam H, maior eſt A, pars toto, quod eſt abſurdum: igitur A, non eſt minor C; ſed neque maior. Ergo A, eſt æqualis C. Quod, &c.

Aliter.

A. 1. 3. 5. K. 7. 9. 11.
E. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$
C ——— ——— ——— I. $\frac{1}{63}$ ———
B. 2. D. $\frac{1}{2}$ F. 3. G. 6. H. 7.

Sit A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum conſequentium differentia B; & in C, ſint diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis numerorum A; & unitas denominata per B, ſit D. Dico C, æqualem eſſe D. Sit E, aggregatum quotlibet ex diſpoſitis in C, à prima, quarum multitudo F; & ex F, in B, fiat G, qui auctus unitate ſit H:
Prop. 23. conſtat E, æqualem eſſe F, denominato per H: inter diſpoſitas in C, ſit I, proximè ſuccedens aggregatis in E; & K, numerus ordinis eiuſdem inter numeros A, cuius I,
Prop. 21. inter vnitates C: conſtat etiam, quod unitatum C, quæ ſuccedunt ab I, ſumptæ ſemper totidem ſecundum numerum K, ad ſingulas eaſdem à prima ſunt ut unitas ad K; ergo colligendo, omnes C, ab I, ad omnes eaſdem C, à prima ſunt ut unitas ad K; ergo conuertendo, & per conuerſionem rationis, omnes C, ad aſſumptas in E,

ſunt

ſunt ut K, ad exceſſum K, ſuper vnitatem: & quoniam K, & I, in ſuis diſpoſitionibus ſunt ordinis eiuſdem; eſt exceſſus K, ſuper unitatem ad exceſſum conſequentium B, vt multitudo aggregatarum in E, videlicet numerus F, ad unitatem; ergo exceſſus K, ſuper unitatem eſt æqualis producto ex F, in B, videlicet numero G; & propterea, adiecta hinc inde unitate, numerus K, eſt ęqualis H; igitur C, ad E, eſt ut H, ad G; & E, ad unitatem eſt ut F, denominatus per H, ad unitatem, uidelicet ut F, ad H; ergo ex æquo in perturbata C, ad unitatem eſt ut F, ad G; ſed quia B, multiplicando F, facit G, eſt ut F, ad G, ita unitas ad B; uel unitas denominata per B, uidelicet D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem eſt ut D, ad eamdem uuitatem. Æquales ergo ſunt C, & D. Quod, &c.

Theor. 25. Prop. 27.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aßumpta ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex numero multitudinis ipſarum, & differentia diſpoſitionis Arithmeticæ ad vnitatem.

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti ab unitate quorum conſequentium differentia B; & unitatum, quę denominantur planis A, ſint aſſumptæ à prima C, totidem, quot ſunt unitates in D; & ſuccedentes in infini-

A.	1.		3.		5.		7.		9.		11.		
C.		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{35}$	E.	———		———		———	
B.	2.			D.	3.		F.	6.			G.	7.	

tum intelligantur diſpoſitæ, & aggregatæ in E; & ex B, in D, producatur F. Dico C, ad E, eſſe ut F, ad unitatem. Augeatur F, unitate ut fiat G: conſtat C, æquales eſſe D, denominato per G; & C, E, ſimul æquales eſſe unitati denominatę per B; & quia ex ductu B, in D, fit F, eſt unitas ad B, ut D, ad F; & unitas denominata per B, eſt æqualis D, denominato per F; propterea C, E, ſimul ſunt æquales D, denominato per F; ergo C, ad C, E, ſimul ſunt ut D, denominatus per G, ad D, denominatum per F; uel reciprocè, ut F, ad G; & diuidendo, C, ad E, ſunt ut F, ad unitatem. Quod, &c.

Prop. 23.
Prop. 27.

Theor. 26. Propoſ. 28.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ad vltimam aſſumptarum ſunt, vt productum ex numero eiuſdem ordinis cum aſſumpta inter Arithmeticè diſpoſitos, & numero multitudinis aſſumptarum ad vnitatem.

SIt in A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab unitate; & unitatum, quæ denominantur planis A, ſint quot-

A. 1.		3.		E. 5.		F. 7.
B.	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{15}$		D. $\frac{1}{35}$	
			C. 3.			

quotlibet aſſumptæ à prima B, quarum multitudo C, & ultima D, & eiuſdem ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos numerus E. Dico B, ad D, eſſe ut planum C E, ad unitatem. Inter numeros A, ſit F, proximus maior E. Et quoniam E, D, ſunt eiuſdem ordinis in ſuis diſpoſitionibus; conſtat D, æqualem eſſe unitati denominatæ plano E F: quoniám etiam C, eſt multitudo B, ſunt in ordine A, numeri ab unitate ad E, totidem, & poſt unitatem ad F, pariter totidem Arithmeticè diſpoſiti; ergo exceſſus F, ſuper unitatem toties continet differentiam conſequentium, quot ſunt unitates in C; ergo C, multiplicando differentiam conſequentium producit exceſſum F, ſuper vnitatem cui quidem exceſſui adiecta vnitate fit numerus F; vnde conſtat B, eſſe æquales C, denominato per F; ergo B, ad D, ſunt vt C, denominatus per F, ad vnitatem denominatam per planum E F; & multiplicando terminos per planum E F, vt B. ad D, ita ſe habet planum C E, ad unitatem. Quod, &c. Prop. 23.

Theor. 27. Propoſ. 29.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quælibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt differentia conſequentium ad numerum

rum

rum ordinis eiuſdem cum aſſumpta inter Arithmeticè diſpoſitos.

A. 1. 3. E. 5. 7. 9. 11

B. 2. C. $\frac{1}{63}$ D — —

F $\frac{1}{[illegible]}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ G. 3.

SIt in A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum differentia B; & vnitatum, quæ denominantur planis A, ſit aſſumpta C, quam ſuccedentes in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſint in D; & eiuſdem ordinis cum C, ſit E, inter numeros A. Dico C, ad D, eſſe ut B, ad E. Sint, quæ præcedunt D, aggregatæ in F, quarum multitudo G; conſtat C, ad F, eſſe ut unitas ad planum G E; & F, ad D, eſt ut planum B G, ad unitatem; ergo ex æquo in perturbata C, ad D, eſt ut planum B G, ad planum G E; vel ut B, ad E. Quod, &c.

Prop. 28.
Prop. 27.

Theor. 28. Prop. 30.

Duarum fractionum minimis numeris expreſſarum, cum denominatores numeratorum ſunt æquemultiplices ſuperparticulares, maior eſt, quæ maioribus numeris exponitur, & exceſſus eſt æqualis exceſſui numeratorum denominato per planũ denominatorum.

Sint

A.3. H.4. B.7.
——— ——— C.12. D.28.
F.13. G.29.
L.91. K.87. I.84.

SInt duæ fractiones, quarum numeratorum A, B, ſint æquemultiplices C, D; & adiecta ſingulis unitate fiant denominatores F, G, æquemultiplices ſuperparticulares numeratorum A, B, quibus propoſitæ fractiones in minimis numeris exprimuntur; & ſit B, maior A, per exceſſum H; vnde fit etiã D, maior C; & addita communi unitate, G, maior F. Dico fractionem B, per G, excedere fractionem A, per F, numero H, denominato per planum F G. Ex B, ducto in C, & F, producantur I, & K; & ex A, in G, fiat L: quia D, C, ſunt æquemultiplices B, A, ut B, ad A, ita D, ad C; & idem I, qui fit ex B, in C, fiet etiam ex A, in D; igitur A, multiplicando G, D, facit K, I; & multiplicando vnitatem exceſſum G, D, facit ſe ipſum A, exceſſum K, I: demonſtrabitur eodem modo B, fieri exceſſum L, I: ergo exceſſus B, A, videlicet H, eſt etiam exceſſus L, K; ſed exceſſus fractionum B, per G, & A, per F, eſt exceſſus L, K, denominatus plano G F; ergo exceſſus fractionum B, per G, & A, per F, eſt H, denominatus plano G F. Quod, &c.

Theor. 29. Prop. 31.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſum-

aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt multiplex differentia in diſpoſitione ſecundum multitudinem aſſumptarum ad multiplicem eiuſdem differentiæ ſecundum multitudinem præcedentium à prima ſemper auctum vnitate.

B. 3.

A. 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19.

E. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$ C. $\frac{1}{70}$ $\frac{1}{130}$ $\frac{1}{208}$ G. —

F. 2. D. 3. L. 5.

I. 6. K. 7. H. 9. M. 16.

SIt A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum differentia B; & vnitatum, quæ denominantur planis A, ſint aſſumptæ C, quarum multitudo numerus D; & ſint E, quæ præcedunt, quarum multitudo numerus F; & quæ ſequuntur ſint in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ in G; & ex B, ducto in F, D, fiant I, H; & I, auctus unitate fiat K. Dico C, ad G, eſſe ut H, ad K. Fiat ex F, D, aggregatum L, & ex H, K, aggregatum M: conſtat L, eſſe multitudinem E, & C, ſimul. Et quoniam ex B, ducto in F, D, facti ſunt I, H; etiam ex B, in L, fiet aggregatum ex I, H; quod auctum unitate eſt aggregatum ex H, K, videlicet M: ergo M, eſt productum ex L, in B, auctum unitate; & propterea
Prop. 23. C, E, ſimul ſūt ęquales L, denominato per M; & E, ęqualis eſt F, denominato per K; ergo C, eſt æqualis exceſ-
Prop. 30. ſus L, F, nempe D, numero denominato per planum M K; ergo C, ad E, C, ſimul eſt ut D, denominatus per planum M K, ad L, denominatum per M; vel (multiplicando

do terminos per planum M B,) ut planum D B, denominatum per K, ad planum B L: ſunt autem E, C, ſimul ad G, vt planum B L, ad unitatem; ergo ex æquo C, ad G, eſt ut planum B D, vel H, denominatus per K, ad unitatem; ſed eſt H, denominatus per K, ad unitatem ut H, ad K. Ergo C, ad G, eſt ut H, ad K. Quod, &c. Prop. 2[illegible].

Theor. 30. Prop. 32.

Vnitates, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate binæ à prima ſunt duplæ ſingularum vnitatum, quæ denominantur planis omnium imparium ab vnitate.

A.	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.
C.		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$	
B.	1.				3.				5.				7.
D.			$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{15}$				$\frac{1}{35}$		

SInt diſpoſitiones omnium numerorum A, & omnium imparium B, ab vnitate; & vnitatum denominatarum planis A, & B, ſint C, & D. Dico binas C, duplas eſſe ſingularum D, à prima. Quoniam in A, ſunt omnes impares interiectis inter binos conſequentes ſingulis paribus, concipientur ſingulę diſpoſitiones Arithmeticæ trium numerorum, quorum extremi impares, & medius par; igitur ſingula plana ſub extremis imparibus, videlicet ſingula plana numerorum B, à primo ſunt media harmonicè inter bina plana ſub ſingulis impari- Prop. 1.

 bus

bus,& intermedio pari, videlicet inter bina plana nume-
Prop. 3. rorum A, à primo; ergo ſingulæ vnitates planis B, denominatæ, videlicet ſingulæ D, à prima ſunt mediæ Arithmeticè inter binas vnitates planis A, denominatas, videlicet binas C, à prima. Ergo binæ C, ſunt duplæ ſingularum D, à prima. Quod, &c.

Theor. 31. Prop. 33.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate ſumptæ ſemper totidem à prima ſecundum aliquem numerum ad vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè cum eodem numero exceſſu diſpoſitorum ab vnitate ſingulas à prima ſunt, vt idem numerus ad vnitatem.

A	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{90}$	

C. 3.

D	1.		4.		7.		10.
E		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{28}$		$\frac{1}{70}$	

Sint diſpoſitiones A, omnium numerorum, & B, vnitatum denominatarum planis A, quæ ſemper totidem ſumantur à prima ſecundum numerũ C; ſint etiam diſpoſitiones, vna quidẽ D, Arithmetica numerorum ab vnitate cum exceſſu C, & altera E, vnitatum, quæ denominantur planis D. Dico quòd B, totidem ſemper

à pri-

Digitized by Google

à prima, quot ſunt vnitates in C, ad ſingulas E, ſunt vt C, ad vnitatem. Quoniam in D, ſunt numeri ab vnitate, quorum exceſſus C, & in A, ſunt oẽs numeri; igitur oẽs D, ſunt inter numeros A, ab vnitate ſemper totidem interiectis, quot ſunt vnitates C, vna dempta; & propterea in A, poſſunt cõcipi ab vnitate ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ totidem ſemper terminorum, quot ſunt vnitates C, vna adiecta, quorum in extremis locis ſunt numeri D; & B, ſumptæ ſemper totidem à prima, quot ſunt vnitates in C, ſunt vnitates denominatæ planis numerorum, qui in ſingulis huiuſmodi diſpoſitionibus comprehenduntur; & E, ſingulæ à prima ſunt vnitates denominatæ planis extremorum earundem diſpoſitionum. Ergo ſumptæ B, à prima ſemper totidem ſecundum numerum C, ſunt ad ſingulas E, à prima, vt C, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 8.

Theor. 32. Prop. 34.

Factis duabus Arithmeticis diſpoſitionibus à duobus numeris, quorum ſunt æquemultiplices differentiæ in diſpoſitionibus; vnitates denominatæ planis numerorum earumdem, cum eiuſdem ſunt ordinis, inter ſe reciprocè ſunt, vt quadrati primorum numerorum.

Digitized by Google

C. 2. D. 5. E. 6. F. 15. G. 3.

A.	2.		8.		14.		20.		26.
H.		[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]	
B.	5.		20.		35.		50.		65.
I.		[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]	
K.	1.		4.		7.		10.		13.
L.		[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]	

SInt A,& B, duæ Arithmeticæ diſpoſitiones à numeris C,D,quarum differentiæ ſint E,F,æquemultiplices C, D, per numerum G; & ſint H, I, vnitates denominatæ planis numerorum A, B. Dico H, ad I, eiuſdem ordinis eſſe, vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Fiat K, Arithmetica diſpoſitio ab vnitate, in qua differentia G, cuius numerorum planis denominatæ vnitates diſponantur, in L. Quoniam C, metitur ſe ipſum primo loco diſpoſitum in A, per vnitatem primo loco diſpoſitam in K; & metitur E, differentiam numerorum A, per G, differentiam numerorum K; ergo componendo, C, metitur omnes A, per omnes eiuſdem ordinis K; ergo L, ad H, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri C, ad vnitatem; & conuertendo, H, ad L, ita ſe habent vt vnitas ad quadratum C: eadem methodo demonſtrabimus, quod L, ad I, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri D, ad vnitatem; & ex æquo in perturbata H, ad I, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Quod, &c.

Prop. 19.

Theor.

Theor. 33. Prop. 35.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticæ diſpoſitorum ab aliquo numero, ſumptæ ab aſſumpta ſemper totidem ſecundum numerum ordinis eiuſdem inter Arithmeticè diſpoſitos, ad ſumptas à prima ſemper totidem ſecundum primum numerum eorumdem Arithmeticè diſpoſitorum ſunt, vt idem primus numerus ad numerum ordinis eiuſdem cum aſſumpta.

		B. 2.		E. 5.				
A. 2.		5.	8.	11.	14.	17.	20.	
C.	$\frac{1}{10}$	D. $\frac{1}{40}$	$\frac{1}{88}$	$\frac{1}{154}$	$\frac{1}{238}$	$\frac{1}{340}$		
F. 3.								
G. 2.			8.		14.		20.	
I.		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{112}$		$\frac{1}{280}$		
H.		5.					20.	
K.				$\frac{1}{100}$	&c.			

Sint A, numeri Arithmeticè diſpoſiti à B, & ſint C, vnitates denominatæ planis numerorum A, quarum aſſumpta D, & eiuſdem ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos A, ſit E. Dico C, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem C, ſumptas à prima totidem ſemper ſecundum numerum B, eſſe vt B,

ad

ad E: ſit F, differentia in diſpoſitione A, & à numeris B, E, fiant Arithmeticæ diſpoſitiones G, H, quarum differentiæ plana F B, F E; & vnitates denominatæ planis numerorum G, H, ſint I, K. Quia omnes numeri G, H, ſunt inter numeros A, à B, E, ſemper totidem interiectis, quot ſunt vnitates in B, E, vna dempta; poterunt concipi in A, ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ à B, C, totidem ſemper numerorum, quot ſunt vnitates in B, E, vna amplius, in quarum extremis reperiuntur bini conſequentes numeri diſpoſitionum G, H: ergo vnitates denominatæ planis huiuſmodi ſingularum diſpoſitionum Arithmeticarũ ab E, cuiuſmodi ſunt C, ſumptę à D, ſemper totidem ſecundum E, ad vnitates denominatas plano extremorum earumdem, cuiuſmodi ſunt ſingulæ K, à prima ſunt vt E, ad vnitatem, vel vt quadratus numeri E, ad E; ſingulæ autem K, ad ſingulas I, à prima ſunt, vt quadratus numeri B, ad quadratum E: ergo ex æquo in perturbata C, ſumptæ à D, ſemper totidem ſecundum E, ad ſingulas I, a prima ſunt, vt quadratus B, ad E; ſingulæ autem I, vtpote vnitates denominatæ planis extremorum diſpoſitionum Arithmeticarum, quæ ſingulæ concipiuntur inter numeros A, a B, ad vnitates denominatas planis conſequentium earumdem diſpoſitionum, cuiuſmodi ſunt vnitates C, ſumptæ a prima ſemper totidem ſecundum numerum B, ſunt vt vnitas ad B, vel vt B, ad ſui quadratum: ergo ex æquo in perturbata C, ſumptæ a D, ſemper totidem ſecundum E, ad eaſdem C, ſumptas a prima ſemper totidem ſecundum B, ſunt vt B, ad E. Quod, &c.

Prop. 8.

Prop. 34.

Prop. 8.

Theor.

Theor. 34. Propoſ. 36.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ſumptæ à duabus aſſumptis totidem ſemper ſecundum numeros ordinum earumdem ſunt reciprocè, vt iidem numeri.

A. 2.		E. 5.		8.		F. 11.		14.
B.	$\frac{1}{10}$		C. $\frac{1}{40}$		$\frac{1}{88}$		D. $\frac{1}{154}$	

SInt numeri A, diſpoſiti Arithmeticè, & B, vnitates denominatæ planis eorumdem, quarum ſint aſſumptæ C, D, & eorumdem ordinum inter numeros A, ſint E, F. Dico B, ſumptas a C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundum numerum F, eſſe vt F, ad E. Quoniam B, ſumptæ à C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à prima ſemper totidem ſecundum primum numerorum A, ſunt vt idem primus ad E; item ipſæ B, ſumptæ à prima ſemper totidem ſecundum eumdem numerum primum ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundũ numerum F, ſunt vt F, ad eumdem primum numerorum A; ergo ex æquo in perturbata B, ſumptæ à C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundum numerum F, reciprocè ſunt vt F, ad E. Quod, &c.

Prop. 35.

Prop. 35.

Digitized by Google

Theor. 35. Propoſ. 37.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum, ſumptæ quotlibet à prima ſunt æquales numero multitudinis earumdem denominato per productum ſub eodem numero multitudinis, & primo numero, & differentia in diſpoſitione ſemper auctum quadrato eiuſdem primi numeri.

B. 2.	C. 3.	E. 4	G. 24.	H. 28.	F. $\frac{1}{7}$
A. 2.	5.	8.	K. 11.	L. 14.	17.
D. $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{88}$	I. $\frac{1}{154}$	$\frac{1}{238}$	

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti à B, cum differentia C; & ſint D, unitates denominatæ planis numerorum A, quarum ſumptę quotlibet à prima ſecundum multitudinem E, ſint aggregatæ in F; & ex E, in planũ B C, ducto ſit productus G, qui auctus quadrato B, ſit H. Dico quod F, eſt æqualis E, denominato per H. Sit I, vltima ſumptarum in F; & K, inter numeros
Prop. 8. A, eiuſdem ordinis, cui proximus maior L: conſtat F, ad vnitatem denominatam plano B L, ſe habere vt E, ad vnitatem; ergo F, eſt æqualis E, denominato per planum B L: quoniam, quot ſunt vnitates in E, tot ſunt aggregatæ in F; totidemque ſunt plana numerorum A, vſque ad L; necnon totidem ſunt exceſſus æquales ipſi C, inter extremos L, B: ergo exceſſus L, B, ad C, eſt vt E,

ad

Digitized by Google

ad vnitatem; & propterea exceſſus L, B, eſt ęqualis plano C E; & L, eſt compoſitus ex plano C E, & numero B; & (multiplicando per B,) planus B L, eſt compoſitus ex producto B, in planum C E, & ex quadrato B; huiuſmodi autem eſt etiam numerus H; ergo planus B L, eſt æqualis H: ergo F, eſt æqualis E, denominato per H. Quod, &c.

Theor. 36. Propoſ. 38.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum, quotlibet aggregatæ à prima ſunt minores vnitate denominata plano primi numeri, & differentiæ diſpoſitionis Arithmeticæ.

A. 5. C. 2. D. 3. E. 6. F. 30. G. 34.

B $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ $\frac{1}{238}$

SInt in B, ſumptæ à prima ſecundum numerum A, quotlibet vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum à C, cum differentia D; & fiat E, planum C D. Dico B, minorem eſſe vnitate denominata per E. Ex A, in E, ducto fiat F, qui auctus quadrato C, ſit G: quia G, maior eſt F, habet A, ad G, proportionem minorem, quam ad F; ſed, cum F, ſit productus ex A, in E, vt A, ad F, ita eſt vnitas ad E; ergo A, ad G, minorem habet proportionem, quam vnitas ad E; & A, denominatus per G; minor eſt vnitate denominata per E; eſt autem B, æqualis A, denominato per G; Prop. 37. ergo B, minor eſt vnitate denominata per E. Quod &c.

Digitized by Google

Corollarium Primum.

Prop. 15. *Vnde conſtat vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis.*

Corollarium Secundum.

Prop. 16. *Conſtat etiam, quod vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum.*

Probl. 3. Prop. 39.

Data proportione minoris inæqualitatis alteram inuenire maiorem data, quæ ſit inter numeros quorum minor ſit multiplex dati, & maior minorem excedat altero dato.

Sit

Digitized by Google

A. 23.	C. 3.	E. 6.	G. 42.
B. 29.	D. 7.	F. 7.	H. 49.

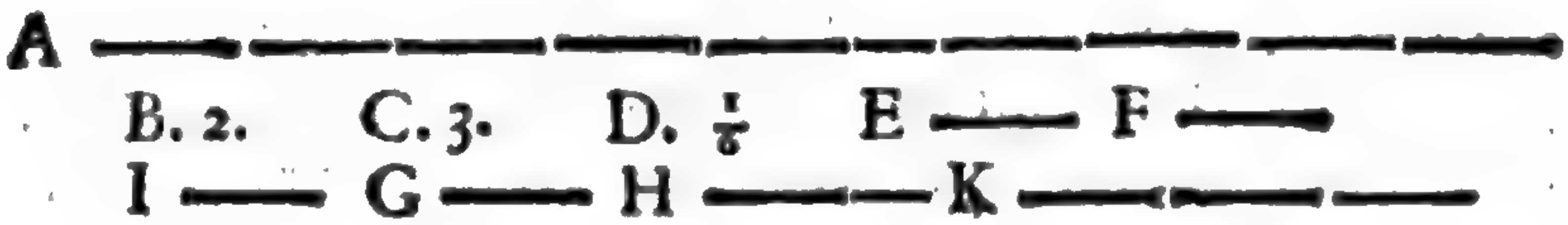
SIt data proportio minoris inæqualitatis A, ad B; datiq; numeri C, & D; opportet inuenire alteram proportionem minoris inæqualitatis maiorem data A, ad B, quæ ſit inter numeros, quorum minor ſit multiplex C, & maior minorem excedat per D. Inueniatur proportio maior data A, ad B, quæ ſit numeri E, quem datus C, metiatur ad numerum F, vnitate maiorem; & D, multiplicando E, F, faciat G, H. Dico proportionem G, ad H, eſſe quæſitam. Eſt enim vt E, ad F, ita G, ad H, proportio minoris inæqualitatis maior data A, ad B; & quia C, metitur E; & E, metitur G; ergo C, metitur G; & conuertendo, G, eſt multiplex C: quia E, ad F, eſt vt G, ad H; diuidendo, E, ad vnitatem eſt vt G, ad exceſſum H, G; & permutando, E, ad G, eſt, vt vnitas ad exceſſum H, G; ſed (cum D, multiplicando E, fecerit G,) vt E, ad G, ita eſt vnitas ad D; ergo vnitas ad exceſſum H, G, eſt vt vnitas ad D; igitur D, eſt exceſſus H, G: inuenta eſt ergo proportio minoris inæqualitatis G, ad H, maior data A, ad B, in qua minor numerus G, eſt multiplex dati C, & maior H, excedit G, per alterum datum D. Quod facere, &c. Prop. 1.

Theor. 37. Prop. 40.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum diſpoſitæ in infinitũ, et aggregatæ ſunt æquales vnitati denominatæ p̃ produ-

Digitized by Google

ctum numeri primi in Arithmetica diſpo-ſitione, & differentiæ conſequentium.



SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorũ à B, cum differentia C; & ſit D, vnitas denominata plano B C. Dico A, eſſe æqualem D. Alias erit A, maior, vel minor D: ſit maior; igitur in aliqua multitudi-
Coroll. 2. prop. 38. ne ſumptę à prima vnitates diſpoſitæ in A, implent D: ſit huiuſmodi multitudinis numerus E, qui adiecta vnitate fiat F; ergo aliquot vnitates A, ſumptæ in multi-
Def. 10. Prop. 38. tudine F, ſunt minores D, quod eſt abſurdum; igitur
Prop. 39. non eſt A, maior D. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad D, inueniatur altera minoris inæqualitatis maior data, quæ ſit numeri G, multiplicis plani B C, ad numerum H, excedentem ipſum G, quadrato numeri B; ſit autem G, multiplex plani B C, ſecundum I; & vnitatum denominatarum in A, ſumantur à prima totidem ſecundum numerum I; & ſumptarum
Prop. 37. ſit aggregatum K; conſtat K, æqualem eſſe I, denominato per H; & quoniam I, multiplicando planum B C, facit G; ergo vt vnitas ad planum B C, ita ſe habet I, ad G; ſed vnitas ad planum B C, eſt vt D, ad vnitatẽ; ergo vt I, ad G, ita eſt D, ad vnitatem; & G, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad D; ergo ex æquo in perturbata I, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad vnitatem; ſed vt I, ad H, ita eſt K, ad vnitatem; ergo K, ad vnitatem habet maiorem pro-

por-

Digitized by Google

portionem quam A, ad eamdem vnitatem, maior ergo eſt K, quàm A, pars, quàm totum, quod eſt abſurdum: non eſt ergo A, maior D, neque minor. Ergo A, æqualis eſt ipſi D. Quod, &c.

Idem Aliter.

B. 2.			C. 3.			
A. 2.		5.	F. 8.	11.	14.	17.
D.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	E $\frac{1}{88}$	$\frac{1}{154}$	$\frac{1}{238}$	

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti à B, cum differentia C; & D, vnitates denominatæ planis A, in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ. Dico D, æquales eſſe vnitati denominatæ plano B C. Sumantur D, à prima tot, quot ſunt vnitates in B, & aſſumptas proximè ſequatur E, cuius ordinis inter numeros A, ſit F; & ab E, ſumantur D, totidem ſemper ſecundum numerum B, ſicut à prima; & iterum ab eadem E, ſumantur totidem ſemper ſecundum numerum F: quia D, ſumptę ab E, ſecundum F, ſemper totidem ad eaſdem D, ſumptas à prima ſecundum B, ſemper totidem ſunt vt B, ad F; ergo colligendo, omnes D, ab E, ad omnes D, ſunt vt B, ad F; & per conuerſionem rationis primæ ſumptæ D, à prima ſecundum numerum B, ad omnes D, à prima ſunt vt exceſſus F, B, ad F; eſt autem exceſſus F, B, toties multiplex exceſſus C, quot ſunt primæ ſumptæ D, videlicet ſecundũ numerum B; quare exceſſus F, B, eſt æqualis plano B C; & F, eſt compoſitus ex plano B C, & B; ſumptæ vero primæ D, ſecundum numerum B, ſunt æquales B, denominato per productum ex B, & plano B C, auctum quadrato B; videlicet diuidendo per B, vnitati denominatæ per planum B C, auctum B, Prop. 35. Prop. 37.

vel

uel unitati denominatæ per F; ergo unitas denominata per F, ad D, eſt ut planum B C, ad F; uel ut unitas denominata per F, ad unitatem denominatam plano B C: ergo ſunt æquales D, & unitas denominata plano B C. Quod, &c.

Theor. 38. Prop. 41.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum quotlibet aſſumptæ à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, ut planum ſub numero aſſumptarum, & differentia diſpoſitionis Arithmeticæ ad primum eiuſdem diſpoſitionis numerum.

B. 2. C. 3. D. 4.

A. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$

E. $\frac{1}{7}$ F

SInt A, unitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum à B, cum differentia C; quarum aſſumptæ à prima quotlibet ſecundum numerum D, ſint compoſitæ in E; & reliquæ in infinitum diſpoſitæ ſint in F.

Prop. 8. Dico E, ad F, eſſe ut planum C D, ad B. Sunt enim E, æquales D, denominato per productum ex D, & plano

Prop. 19. B C, auctum quadrato B; & A, æquales unitati denominatæ plano B C; ergo E, ad A, ſunt ut D, denominatus per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam plano B C; & diuiden-

uidendo per D, ut unitas denominata per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam per productum ex D, & plano B C; uidelicet ut productum ex D, & plano B C, ad ſeipſum auctum quadrato B; & diuidendo per B, ut productum ex D, in C, ad ſe ipſum auctum numero B; & diuidendo, E, ad F, ſunt ut planum D C, ad B. Quod, &c.

Theor. 39. Prop. 42.

Vnitatum denominatarum planis Arithmeticè diſpoſitorum quotlibet aſſumpta à prima ad vltimam aſſumptarum ſunt, vt planum numeri multitudinis aßumptarum, & numeri ordinis eiuſdem cum aſpta inter Arithmeticè diſpoſitos ad eorumdem primum.

C. 2.	5.	8.	11.	F. 14.	G. 17.		D. 3.
B	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{88}$	$\frac{1}{154}$	E. $\frac{1}{238}$		A. 5.

SInt ſecundum numerum A, totidem in B, diſpoſitæ unitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum a C, cum differentia D, quarum aſſumptarum ultima E; & eiuſdem ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos ſit F, quem ſequatur G. Dico B, ad E, ſe habere ut planum A F, ad C. Quoniam B, ſunt æquales A, denominato per productum ex A, & plano C D, auctum quadrato C; & E, eſt unitas denominata plano Prop. 37.

Prop. 37.

no

no F G; productum autem ex A, & plano C D, auctum quadrato C, eſt planum C G; ergo B, ad E, ſunt ut A, denominatus plano C G, ad unitatem denominatam plano F G; & multiplicando per G, ut, A denominatus per C, ad uninatem denominatam per F; & diuidendo per A, ut unitas denominata per C, ad unitatem denominatam per planum A F; uidelicet ut planum A F, ad C. Quod, &c.

Theor. 40. Propoſ. 43.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum, qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, ut differentia ad numerum ordinis aſſumptæ inter Arithmeticè diſpoſitos.

A. 2. 5. 8. 11. D. 14. B. 3.
F. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ C. $\frac{1}{238}$ E ——— G. 5.

VNitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab A, cum differentia B, ſit aſſumpta C, cuius ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos numerus D; & ſuccedentes ipſi C, ſint diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ in E; quæ uerò præcedunt unà cum eadem aſſumpta ſint compoſitæ in F, quarum multitudo G. Dico C, ad E, ſe habere uti B, ad D. Quoniam C, ad F, (Prop. 42.) eſt ut A, ad planum G D; & F, ad E, ſunt ut planum G B, (Prop. 41.) ad A; ergo ex æquo in perturbata C, ad E, eſt ut planũ G B, ad planũ G D; & diuidẽdo per G, ut B, ad D. Quod, &c.

Theor.

Theor. 41. Prop. 44.

Duarum fractionum, cum denominatores eodem numero excedunt æquemultiplices numeratorum, maior eſt, quæ maioribus numeris exprimitur, & exceſſus eſt fractio, in qua productum eiuſdem numeri & differentiæ numeratorum denominatur plano denominatorum.

I. 5. L. 3. K. 2.
A —— B ——
C. 34. E. 4. D. 16.
G. 30. H. 12.

SInt duæ fractiones A, B, quarum denominatores C, D, ſuperant eodem numero E, numeros G, H, æquemultiplices numeratorum I, K; & I, excedat K, per L; ergo G, excedit H; & adiecto E, communi, etiam C, excedit D. Dico A, maiorem eſſe B. Quia G, H, ſunt æquemultiplices I, K; ergo I, ad G, eſt vt K, ad H; & quia G, maior eſt H, maiorem habet proportionem G, ad E, quàm H, ad E; & componendo, G, ad C, quàm H, ad D; & ex æquo I, ad C, quam K, ad D; ergo fractio A, maior eſt B. Dico præterea exceſſum eſſe planum L E, denominatum plano C D. Quoniam I, ad K, eſt vt G, ad H; planum I H, plano K G, eſt æquale: & quoniam E, eſt exceſſus D H; planum I E, eſt exceſ-

ſus planorum I D, I H, vel I D, K G: & eadem ratione planum K E, eſt exceſſus planorum K C, H G; ergo idem eſt exceſſus tùm planorum I D, K C, tum etiam planorum I E, K E; cum autem L, ſit exceſſus I, K; ergo L E, eſt exceſſus planorum I E, KE; videlicet exceſſus planorum I D, K C; ſed exceſſus A, B, eſt æqualis exceſſui planorum I D, K C, denominato per planum D C; ergo exceſſus A, B, eſt planum L E, denominatum plano D C, Quod, &c.

Theor. 42. Prop. 45.

Vnitatum, quæ denominantur planis diſpoſitorum Arithmeticè, quotlibet aſſumptæ ad ſuccedentes in infinitum ſunt; vt multiplex differentiæ in Arithmetica diſpoſitione ſecundum multitudinem aſſumptarum ad multiplicem eiuſdem differentiæ ſecundum multitudinem præcedentium auctum primo eiuſdem diſpoſitionis numero.

B. 4. C. 5. Q. 70.
G. 2. D. 3. M. 5. N. 116.
F $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{126}$ A $\frac{1}{266}$ $\frac{1}{456}$ $\frac{1}{696}$ E ——— ———
I. 10. K. 15. L. 14.

SInt A, aſſumptæ vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum à B, cum differentia

tia C; & multitudo A, ſit D; & ſint E, infinitæ ſuccedentes ipſis A; & F, præcedentes, quarum multitudo G; & ex ductu C, in G, D, fiant I, K; & I, auctus B, ſit L. Dico A, ad E, ſe habere vt K, ad L. Fiat M, aggregatum numerorum G, D; & N, productum B C M, auctum quadrato B. Conſtat F, A, ſimul æquales eſſe M, denominato per N: ducatur etiam B, in L, & fiat Q: quia L, eſt compoſitus ex B, I; videlicet ex B, & plano G C; etiam Q, compoſitus eſt ex producto BC G, & ex quadrato B: conſtat pariter F, æquales eſſe G, denominato per Q; & A, exceſſui dictarum fractionum, videlicet producto ſub D, & quadrato B, denominato per planum QN; ergo A, ad F, A, ſimul ſunt vt productum ex D, & quadrato B, denominatum per QN, ad M, denominatum per N; & multiplicando per N C, vt productũ ex plano D C, & quadrato B, denominatum per Q, ad planum M C; ſunt autem F, A, ſimul ad E, vt M C, ad B; ergo ex æquo A, ad E, ſunt vt productum ex plano DC, & quadrato B, denominatum per Q, ad B; & diuidendo per B, vt productum DCB, denominatũ per Q, ad vnitatem; videlicet vt productũ DCB, ad Q; eſt autem K, æqualis plano DC; & Q, æqualis plano BL; ergo A, ad E, ſunt vt productum KB, ad productum BL; & diuidendo per B, vt K, ad L. Quod, &c.

Prop. 37. Prop. 37. Prop. 44. Prop. 41.

✠

Finis Libri Primi.

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ, SEV De Additione Fractionum

LIBER SECVNDVS,

In quo de Fractionibus agitur, quas denominant numeri ſolidi. Demonſtrantur Additiones in propoſitionibus 4. 5. 13. 20. Quadraturæ verò in 8. 15. 23. 27.

Theorema I. Propoſitio I.

Si quatuor magnitudines binæ ſe æqualiter exceſſerint, planum ſub maioribus excedit planum ſub minoribus plano ſub eodem exceſſu, & aggregato maximæ, & minimæ.

SIt E, exceſſus A, B, æqualis exceſſui C, D. Dico exceſſum planorum A C, B D, æqualem eſſe plano ſub E, & aggregato A, D. Quoniam E, eſt exceſſus C, D;

Digitized by Google

E. 3. A. 5. B. 2. C. 7. D. 4.

C, D; planum E A, eſt exceſſus planorum C A, D A: & quoniam E, eſt exceſſus A, B; planum E D, eſt exceſſus planorum D A, D B; ergo colligendo plana E A, E D, ſimul ſunt ęqualia exceſſibus planorum C A, D A, D A, D B; videlicet vni exceſſui planorum C A, B D; plana verò E A, E D, ſunt æqualia plano ſub E, & aggregato A, D; ergo exceſſus planorum C A, B D, eſt æqualis plano ſub E, & aggregato A, D. Quod, &c.

Theor. 2. Prop. 2.

Numerorum Arithmeticè diſpoſitorum aggregatum eſt æquale dimidio plani ſub multitudine, & aggregato extremorum.

A. 2. 5. 8. 11. 14. B. 17. C. 4. D. 2.

SInt numeri Arithmeticè diſpoſiti, quorum primus A, vltimus B, & multitudo C. Dico aggregatos æquales eſſe dimidio plani ſub C, & aggregato A, B. Sit primo C, par cuius dimidium D; quoniam numeri A, B, & intermedij totidem ſunt, quot vnitates in C; ergo bini totidem ſunt, quot vnitates in D; bini autem tùm extremi A, B, tùm ab extremis æqualiter diſtantes inter ſe ſunt æquales; ergo omnes aggregati ſunt ad aggregatum extremorum A B, vt D, ad vnitatem; & omnes aggregati ſunt æquales plano ſub D, & aggregato extremorum; videlicet dimidio plani ſub C, & aggregato A, B.

Sed

Digitized by Google

A. 2. 5. 8. 11. B. 14. C. 5. D. 4. E. 8.

Sed eſto C, impar, & vnitate dempta fiat D, par: quia exceſſus extremorum eſt multiplex exceſſus conſequentium per D; ergo exceſsus extremorum A, B, eſt par; & duplum A, eſt par; ergo aggregatum extremorum A, B, eſt par; cuius dimidium ſit E: igitur E, medius eſt inter Arithmeticè diſpoſitos ab A, ad B; & ad E, bini tùm extremi A, B, aggregati, tùm æqualiter diſtantes ab extremis dupli ſunt; ergo omnes aggregati præter E, ad E, ſunt vt D, ad vnitatem; & componendo omnes ad E, ſunt vt C, ad vnitatem; ergo omnes aggregati ſunt æquales plano ſub E, & C; dimidio videlicet plani ſub aggregato A, B, & C. Quod, &c.

Theor. 3. Prop. 3.

Diſpoſitis Arithmeticè quotcunque numeris, differentia planorum ſub primis, & vltimis ad aggregatum omnium præter primum, & vltimum ſunt, vt duplum exceſſus ad vnitatem.

A. 2. B. 5. 8. 11. 14. 17. C. 20. D. 23.
E. 3. F. 18. G. 6. H. 3.

NVmerorum Arithmeticè diſpoſitorum duo primi ſint A, B, duo vltimi C, D, & conſequentium exceſsus E. Dico differentiam planorum DC, AB, eſſe ad

ad omnium aggregatum præter A, D, vt duplus E, ad vnitatem. Quoniã ſunt æquales exceſſus D, C, B, A, viciſſim etiã ſunt æquales exceſſus D, B, C, A; ſit F, exceſſus D, B, vel C, A; ergo exceſſus planorum D C, AB, eſt planum ſub F, & aggregato A, D, vel B, C: ſit G, multitudo omnium præter A, D, cuius dimidium H; ergo aggregatum omnium præter A, D, eſt planum ſub H, & aggregato B, C; & eſt planum ſub E, & aggregato B, C, ad planum ſub H, & aggregato B, C, vt F, ad H; & quoniam F, toties continet E, quot G, vnitates; ergo F, ad G, eſt vt E, ad vnitatem; eſt autem G, ad H, duplus; videlicet vt duplus E, ad E; ergo ex æquo in perturbata F, ad H, eſt vt duplus E, ad vnitatem; ergo exceſſus planorum D C, A B, ad aggregatum omnium præter A, D, eſt vt duplus E, ad vnitatem. Quod, &c. Prop.1.2. Prop.2.2.

Theor. 4. Propoſ. 4.

Diſpoſitis Arithmeticè quotcunque numeris, vnitates denominatæ ſolidis corumdẽ conſequentium ſunt æquales aggregato ex intermedijs diſpoſitis denominato per planoplanum ex binis extremis.

SInt vnitates quotcunque A, denominatæ ſolidis conſequentium Arithmeticè quomodolibet diſpoſitorũ. Dico A, æquales eſſe aggregato eorumdem diſpoſitorum præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Sint B, totidem exceſſus alternorum in eadem diſpoſitione ijſdem ſolidis denominati: & quia

con-

	3.	5.	7.	9.	11.	13.
A.		$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{1}{693}$	$\frac{1}{1287}$	
B.		$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{315}$	$\frac{4}{693}$	$\frac{4}{1287}$	

conſequentium Arithmeticè diſpoſitorum exceſſus ſunt æquales; etiàm alternorum exceſſus æquales inter ſe ſunt; & ſinguli dupli ſunt ad exceſſum conſequentium; ergo ſingulæ B, ad ſingulas A, ſunt vt duplum exceſſus conſequentium ad vnitatem; & colligendo omnes B, ad omnes A, ſunt vt duplum exceſſus conſequentium ad
Prop.3.2. vnitatem; videlicet, vt exceſſus planorum ſub binis extremis ad aggregatum omnium diſpoſitorum præter extremos; & diuidendo per planoplanum ex binis extremis, vt exceſſus planorum ſub binis extremis eorumdẽ planoplano denominatus ad aggregatum omnium præter extremos pariter denominatum: ſunt autèm omnes B, æquales exceſſui planorum ſub binis extremis eorumdem planoplano denominato; ergo omnes A, ſunt æquales aggregato omnium præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Quod, &c.

Theor. 5. Propoſ. 5.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ conſequentium ab vnitate, quotlibet à prima ſunt æquales producto numeri multitudinis ipſarum in numerum ternario maiorem, denominato per quadruplum eiuſdem producti, addito ſemper 8.

Sint

A. 1.	2.	E. 3.	D. 4.	C. 5.	F. 6.
B.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{60}$		
	G. 18.	I. 80.	K. $\frac{18}{80}$	L. 9.	M. 40.

SInt A, numeri conſequentes ab vnitate; & B, vnitates denominatæ ſolidis conſequentium A; & numerus multitudinis B, ſit E; qui ternario auctus fiat F; & productum ex E, in F, ſit G; cuius quadruplum auctum numero 8. ſit I; & ex denominatione G, per I, fiat fractio K. Dico, quòd aggregatum omnium B, eſt æquale K. Numerorum A, ſint D, C, duo, qui ſequuntur E: quoniam numeri A, terni denominant ſingulas B; ergo multitudo numerorum A, qui denominant B, binario ſuperat multitudinem B; videlicet numerum E; eſt autem C, qui binario excedit E; ergo C, eſt multitudo numerorum A, qui denominant B; & ſunt in A, omnes numeri ab vnitate; ergo diſpoſitorum in A, vſque ad C, ſunt vltimi C, D; primi vnitas, & 2; & extremi vnitas, & C: ſit M, planoplanum ſub D, C, 2. & vnitate; & L, ſit aggregatum reliquorum, præter vnitatem, & C; ergo B, ſunt æquales L, denominato per M: & quia C, binario, & F, ternario excedunt E; ergo F, excedit C, vnitate; & F, æqualis eſt C, & vnitati; vel D, & binario; ergo planũ E F, videlicet numerus G, duplus eſt L: item exceſſus plani D C, ſuper binarium (planum videlicet vnitatis, & binarij) duplus eſt eiuſdem L; ergo G, eſt exceſſus plani DC, ſuper binariũ; & planũ DC, excedit G, per binariũ; & quadruplũ DC, excedit quadruplũ G, per 8; eſt autẽ I, qui excedit quadruplum G, per 8; ergo I, eſt quadruplum plani D C, vel duplum planoplani ſub D, C, 2. & vnitate: ergo I, eſt duplum M; & G, ad L, eſt vt I, ad M. & permutando, G, ad I, eſt vt L, ad M; ergo L, denominatus per M, videlicet aggregatum omnium B, eſt æquale G, denominato per I, videlicet fractioni K. Quod, &c.

Prop. 4. 2.

Prop. 2. 2.

Prop. 3. 2.

Theor. 6. Propoſ. 6.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium conſequentium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt minores quarta parte vnitatis.

1.	2.	3.	D. 4.	5.	6. B. 7.	A. 28.
C.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{120}$		E. 112. F. 120.

SInt C, quotlibet vnitates denominatæ ſolidis omnium cõſequentium ab vnitate ſumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores eſſe quarta parte vnitatis. Fiat B, ternario maior D; & planum B D, ſit A; cuius quadruplus E; qui auctus numero 8. ſit F: ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E: & eſt A, ad E, vt vnitas ad 4. ergo A, ad F, minorem habet, quàm vnitas ad 4. & A, denominatus per F, eſt minor quarta parte vnitatis; ſunt autẽ C, aggregatæ æquales A, denominato per F; ergo C, aggregatæ ſunt minores quarta parte vnitatis. Quod, &c.

Prop. 5. 2.

Corollarium Primum.

Pr. 15. 1. *Vnde conſtat vnitates, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum ab vnitate diſpoſi-*

Digitized by Google

ſpoſitas in infinitum, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis.

Corollarium Secundum.

Patet etiam, quod vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum. Pr. 16. 1.

Probl. 1. Prop. 7.

Datis duobus numeris alium inuenire, qui non minorem vno dato metiatur per ſe ipſum auctum altero dato.

A. 53.	M. 3.	E. 15.	F. 12.	G. 6.	
B. 212.	C. 221.	D. R. 221.	H. 6.	K. 9.	L. 54.

Sint dati A, M: opportet numerum inuenire, qui non minorem dato A, metiatur per ſeipſum auctum dato M. Fiat B, dati A, quadruplus; & C, ſumma ex quadrato M, & B; & numeri C, ſumatur latus, vel radix

A. 53.	M. 3.	E. 15.	F. 12.	G. 6.	
B. 212.	C. 221.	D. ℞. 221.	H. 6.	K. 9.	L. 54.

quadrata D; & ſit numerus E, non minor D; à quo ſubtrahatur M; & reſidui F, dimidium ſit G; & H, ſit numerus non minor G. Dico H, metiri numerum non minorem A, per ſeipſum auctum numero M; fiat K, aggregatum ex H, & M; & ex ductu H, in K, fiat L; ergo L, eſt compoſitus ex quadrato H; & plano M H: & quoniam H, non eſt minor G; & eſt duplus G, æqualis F; & F, auctus M, eſt E; & E, non eſt minor D; ergo duplus H, auctus M, non eſt minor D; & quadratum dupli H, aucti M, non eſt minus C; eſt autem quadratum dupli H, aucti M, equale quadrato M, quadruplo quadrato H, & quadruplo plano MH; & ſunt quadruplum quadratum H, & quadruplus planus M H, æquales quadruplo L; ergo quadratum dupli H, aucti M, eſt æquale quadrato M, & quadruplo L; ergo quadratum M, & quadruplus L, non ſunt minores C; & ablato communi quadrato M, quadruplus L, non eſt minor B; & diuidendo per 4. numerus L, non eſt minor A. Inuenimus ergo numerum H, qui metitur L, numerum non minorē A, per ſe ipſum auctum numero M. Quod, &c.

Theor. 7. Prop. 8.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales quartæ parti vnitatis.

Sint

A ———————— B —— C ——
I ——— D — E —— F ——— G — H —

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem eſſe $\frac{1}{4}$. Alias erit A, maior, vel minor $\frac{1}{4}$. ſit maior; igitur in aliqua multitudine ſumptæ à prima vnitates in A, diſpoſitæ implent $\frac{1}{4}$. ſit huiuſmodi multitudinis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C; ergo aliquot vnitates in A, diſpoſitæ ſumptæ à prima in multitudine numeri C, ſunt maiores $\frac{1}{4}$. quod eſt abſurdũ: Non eſt igitur A, maior $\frac{1}{4}$. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{4}$, inueniatur altera maior, quę ſit numeri I, quem numerus 4. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipſius D, ſit octuplus F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per ſe ipſum auctum ternario; & ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudine numeri G; & aſſumptarũ ſumma ſit H: conſtat H, eſſe portionem ipſius A; & æqualem producto ex numero G, in ſe ipſum ternario auctum denominato per quadruplum eiuſdem producti addito 8. quia autem productum ex G, in ſe ipſum ternario auctũ non eſt minus F; etiam denominatum per quadruplum eiuſdem producti addito 8. non eſt minus F, denominato per quadruplum F, addito 8; & (diuidendo vtrumque numerum fractionis per 8.) non eſt minus D, denominato per quadruplũ D, auctũ vnitate; ergo H, non eſt minor, D, denominato per quadruplum D, auctum vnitate; eſt autem I, quadruplus D; & I, auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denominato per E: ſed quia D, ad I, eſt vt vnitas ad 4; vel $\frac{1}{4}$ ad vnitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{4}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus per E, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quam A; maior

Cor. 2. Prop. 9. 2.

Prop. 9. 2.

Pr. 25. 1.

Prop. 7. 2.

Prop. 5. 2.

Pr. 44. 1.

igitur

Digitized by Google

igitur eſt D, denominatus per E, quam A; & non eſt H, minor D, denominato per E: ergo H, eſt maior A, pars, toto; quod eſt abſurdum: non igitur A, minor eſt $\frac{1}{4}$; neque maior; ergo A, eſt æqualis $\frac{1}{4}$. Quod, &c.

Theor. 8. Propoſ. 9.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniū numerorum conſequentium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productum ex numero multitudinis ipſarum in ſe ipſum ternario auctum ad binarium.

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ E ——————————

B. 2. C. 5. D. 10. F. 48.

VNitatum denominatarum ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate ſint A, aſſumptæ à prima in multitudine B; & reſiduæ in infinitum ſint diſpoſitæ, & aggregatæ in E; & B, ternario auctus ſit C; & ex B, in C, fiat D. Dico A, ad E, eſſe vt D, ad binarium. Fiat F, quadruplum D, auctum 8: conſtat A, æqualem eſſe D, denominato per F; & aggregatas A, E, æquales eſſe vnitati denominatæ per 4. ſed quia, vt vnitas ad 4. ita ſe habet D, binario auctus ad F; vnitas denominata per 4; videlicet aggregatæ A, E, ſunt æquales D, binario aucto denominato per F; ergo A, ad aggregatas A, E, eſt vt D, denominatus per F, ad D, binario

Prop. 5. 2.

Prop. 8. 2.

rio

Digitized by Google

rio auctum denominatum per F; & (multiplicando per F,) vt D, ad D, binario auctum; ergo diuidendo, A, ad E, eſt vt D, ad binarium. Quod, &c.

Theor. 9. Prop. 10.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet aſſumpta à prima ad vltimã aſſumptarum ſunt, vt aggregatum ex cubo numeri multitudinis ipſarum, & triplo quadrati eiuſdem ad quaternarium.

B. 4. E. 5. F. 6. D. 7.

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ C $\frac{1}{120}$

SInt vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ A, ſecundum numerum B; & vltima aſſumptarum ſit C. Dico A, ad C, eſſe vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Sit D, numerus ternario maior B; & ſint E, F, qui proximè ſuccedunt ipſi B, in ordine omnium numerorum ab vnitate; conſtat F, E, diſpoſitos eſſe Arithmeticè, vt binarius, & vnitas; & permutando, F, & binarium eſſe Arithmeticè, vt E, & vnitas; & communem exceſſum eſſe B; ergo planum F E, excedit planum ſub binario, & vnitate, plano ſub B, & aggregato ex F, & vnitate; videlicet plano B D; ergo planum B D, auctum binario eſt æquale plano F E: & quia B, eſt multitudo Prop. 1. 2.

ipſa-

B. 4. E. 5. F. 6. D. 7.

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ C $\frac{1}{12}$,

Prop. 5. 2. ipſarum, A; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum B D, auctum 8; ſed quadruplum BD, auctum 8 eſt quadruplum plani B D, aucti 2; videlicet plani E F; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum E F: quia etiam B, eſt numerus multitudinis A, quarum vltima C; conſtat B, eſſe numerum ordinis C; & binario, ac vnitate minorem eſſe numeris, qui ſolidum producunt denominatorem C; ergo C, eſt vnitas denominata ſolido ſub B, & plano E F; ergo A, ad C, eſt vt planum B D, denominatum quadruplo plani E F, ad vnitatem denominatam ſolido ſub B, & plano E F; & multiplicando per planum E F, vt planum B D, denominatum per 4. ad vnitatem denominatam per B; & iterum multiplicando per B, vt ſolidum ſub quadrato B, & D; videlicet aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, denominatum per 4. ad vnitatem; & multiplicando per 4, vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Quod, &c.

Theor. 10. Prop. 11.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt binarius ad numerum ordinis aſſumptæ.

Sint

B. 3 D $\frac{9}{40}$ A $\frac{1}{60}$ C ———————

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate ſit aſſumpta A; cuius ordinis numerus B; & ſuccedentes in infinitum C. Dico A, ad C, eſſe vt binarius ad B. Sit D, aggregatum earum, quæ præcedunt C, à prima; quarum erit A, vltima; & numerus multitudinis ipſarum D, idem, qui ordinis aſſumptæ, videlicet B: ergo A, ad D, eſt vt 4. ad compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B; ſunt autem D, ad C, vt planum ſub B, & ipſo B, ternario aucto; videlicet vt compoſitum ex quadrato B, & triplo B, ad binarium; & multiplicando per B, vt compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad duplum B; ergo ex æquo A, ad C, eſt vt 4. ad duplum B; & diuidendo per 2, vt 2. ad B. Quod, &c. Pr. 10. 2. Pr. 9. 2.

Theor. 11. Prop. 12.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ non à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex numero multitudinis ipſarum in numerũ ternario maiorem auctus duplo plani ſub eodem numero, & multitudine præcedentium, ad productum ex numero multitudinis præceden-

tium in numerum ternario maiorem au-ctum binario.

A. 2. B. 3. M. 5. P. 8. E. 40. F. 168.

G $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ H $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{120}$ $\frac{1}{210}$ I ——————

K. 30. L. 12. O. 5. C. 10. D. 48.

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſint aſſumptæ H, non à prima in multitudine numeri B; quibus in infinitum ſuccedentes I; & præcedentes G, in multitudine numeri A; & productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA, ſit K; ſit etiam O, ternario maior A, & planus AO, ſit C, qui auctus binario fiat L. Dico H, ad I, eſſe vt K, ad L. Fiat M, aggregatum ex A, B; & P, ternario maior M; & planus PM, ſit E; cuius quadruplus auctus numero 8. ſit F: ergo M, eſt multitudo ipſarum Prop. 5. 2. G, H; & ſunt G, H, æquales E, denominato per F: fiat etiam D, quadruplus E; quoniam L, excedit C, per binarium; etiam D, excedit quadruplum C, per 8; ergo G, Prop. 5. 2. sũt ęquales C, denominato per D; ergo exceſſus G, & H, ſupra G, videlicet H, ſunt æquales exceſſui numeri E, denominati per F, ſupra numerum C, denominatum per D: & quia D, F, excedunt per 8. quadruplos C, E; ergo Pr. 44. 1. exceſſus fractionũ E, per F, & C, per D, eſt octuplus exceſſus E, C, denominatus per planum DF: quoniam etiam 3. eſt idem exceſſus tùm P, M, tum O, A; viciſſim exceſſus P, O, eſt æqualis exceſſui M, A; videlicet nume-Prop. 1. 2. ro B; ergo exceſſus planorum PM, OA, videlicet exceſſus E, C, eſt æqualis plano ſub B, & aggregato A, P; eſt autem P, æqualis M, & 3; & M, æqualis A, & B; ergo aggregatum A, P, eſt aggregatum ex B, 3, & duplo A; & planum ſub B, & aggregato A, P, eſt aggregatum ex qua-

Digitized by Google

quadrato B, triplo B, & duplo plani A B; videlicet productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA; cuiuſmodi eſt numerus K; ergo K, eſt exceſſus E, C; & H, ſunt æquales octuplo K, denominato per planum DF; ergo H, ad H, G, ſunt vt octuplus K, denominatus plano D F, ad E, denominatum per F; & multiplicando per F, vt octuplus K, denominatus per D, ad E; ſunt autem G, H, ad I, vt E, ad 2: ergo ex æquo H, ad I, ſunt vt octuplus K, denominatus per D, ad 2; & diuidendo per 2. vt quadruplus K, denominatus per D, ad vnitatem; vel vt quadruplus K, ad D; ergo (quia D, eſt quadruplus L, diuidendo etiam per 4) H, ad I, ſunt vt K, ad L. Quod, &c. Prop.9.2.

Theor. 12. Prop. 13.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt æquales producto numeri multitudinis ipſarum in numerum binario maiorem, denominato per duodecuplum eiuſdem, addito ſemper 9.

SInt A, impares ab vnitate; quorum ſolidis denominatæ ſint vnitates B; quarum multitudo à prima ſit numerus C; & C, auctus binario fiat D; & planus C D, ſit E; cuius duodecuplus auctus 9 ſit G; & ex denominatione E, per G, fiat fractio H. Dico B, eſſe æquales H. Sint I, K, vltimi, qui adhibentur in denominatione

Digitized by Google

A. 1.	3.	5.	I. 7.	K. 9.
B	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{315}$	
C. 3.	D. 5.	E. 15.	G. 189.	H. $\frac{15}{189}$

Prop.4.2. B, ergo B, ſunt æquales aggregato ex omnibus diſpoſitis in A, vſque ad K, præter vnitatem, & K, denominato per planoplanum ſub K, I, 3, & vnitate: & quia terni A, denominant ſingulas B; multitudo diſpoſitorum in A, vſque ad K, binario maior eſt multitudine B, videlicet numero C; ergo numerus C, eſt multitudo omnium A, vſq; ad K, præter duos extremos vnitatem, & K; &
Prop.2.2. aggregatum eorumdem, præter extremos, eſt dimidium plani ſub C, & aggregato extremarum vnitatis, & K; & quoniam inter vnitatem, & K, tot ſunt intermedij, quot vnitates in C; ergo exceſſus extremorum vnitatis, & K, ad 2. exceſſum conſequentium eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; & componendo, exceſſus vnitatis, & K, auctus binario, vel aggregatum ex K, & vnitate ad 2. eſt vt C, auctus 2, videlicet D, ad vnitatem; permutandoq; & conuertendo, D, dimidius eſt aggregati ex K, & vnitate; & planum CD, vel numerus E, dimidius eſt
Prop.2.2. plani ſub C, & aggregato ex K, & vnitate; ergo E, eſt aggregatum omnium A, vſq; ad K, præter extremos vnitatem, & K: eadem ratione, quia exceſſus vnitatis, & K, ad 2. eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; diuidendo, exceſſus I, & vnitatis ad 2. eſt vt C, ad vnitatem; permutandoque, & conuertendo, C, dimidius eſt exceſſus I, & vnitatis; & duplus C, auctus vnitate eſt I; & auctus ternario eſt K; & compoſitus ex 3. & quadruplo quadrati C, & octuplo eiuſdem C, videlicet compoſitus ex 3. & quadruplo E, eſt planus I K, & (multiplicando per 3. planum vnitatis & 3.) compoſitus ex 9, & duodecuplo E, videlicet numerus G, eſt planoplanum ſub
Prop.5.2. K, I, 3, & vnitate: ergo B, ſunt æquales E, denominato per G, videlicet fractioni H. Quod, &c.

Theor.

Digitized by Google

Theor. 13. Prop. 14.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt minores duodecima parte vnitatis.

C. $\frac{1}{15}$. $\frac{1}{105}$. $\frac{1}{315}$. $\frac{1}{693}$.
D. 4. B. 6. A. 24. E. 288. F. 297.

SInt C, quotlibet vnitates denominatę ſolidis omnium imparium ab vnitate ſumptæ in multitudine numeri D, à prima. Dico C, aggregatas minores eſſe $\frac{1}{12}$. Fiat B, binario maior D; & planum B D, ſit A; cuius duodecuplus E; qui auctus numero 9. ſit F. Ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & eſt A, ad E, vt vnitas ad 12. ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad 12. & A, denominatus per F, eſt minor $\frac{1}{12}$. Sunt autem C, aggregatæ æquales A, denominato per F; ergo C, aggregatæ ſũt minores $\frac{1}{12}$. Quod, &c. Pr.13.2.

Corollarium Primum.

Vnde conſtat vnitates denominatas ſolidis omnium imparium ab vnitate in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis. Pr.15.2.

Co-

Digitized by Google

Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quòd vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum.*

Theor. 14. Prop. 15.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales $\frac{1}{12}$.

A ——————————————————————

B — C — D — E — F — G — H — I ———

Sint in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ unitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab unitate. Dico A, æqualem eſſe $\frac{1}{12}$. Alias erit A, maior, uel
Cor. 2. pr. 14. 2. minor $\frac{1}{12}$. Sit maior igitur in aliqua multitudine ſumptę à prima unitates in A, diſpoſitæ implent $\frac{1}{12}$: ſit huiuſmodi multitudinis numerus B, qui unitate adiecta fiat C;
Def. 10. ergo aliquot unitates in A, diſpoſitæ ſumptæ à prima in
Pr. 14. 2. multitudine numeri C, ſunt maiores $\frac{1}{12}$: quod eſt abſurdum:

Digitized by Google

dum: non eſt igitur A, maior $\frac{1}{12}$. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{12}$, inueniatur altera maior, quæ ſit numeri I, quem numerus 12. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipſius D, ſit nonuplus F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per ſe ipſum auctum binario, & ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudine numeri G; & aſſumptarum ſumma ſit H: conſtat H, eſſe portionem ipſius A; & æqualem producto ex numero G, in ſe ipſum binario auctum denominato per duodecuplum eiuſdem producti addito 9: quia autem productus ex G, in ſe ipſum binario auctum non eſt minor F; etiam denominatus per duodecuplum eiuſdem producti addito 9. nõ eſt minor F, denominato per duodecuplum F, addito 9; & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per 9.) non eſt minor D, denominato per duodecuplum D, auctum vnitate; eſt autem I, duodecuplus D; & I, auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denominato per E: ſed quia D, ad I, eſt vt unitas ad 12. uel $\frac{1}{12}$ ad unitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{12}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, uel D, denominatus per E, ad unitatẽ habet maiorem proportionẽ, quàm A: maior igitur eſt D, denominatus per E, quàm A; & non eſt H, minor D, denominato per E; ergo H, eſt maior A, pars toto; quod eſt abſurdum: Non igitur A, minor eſt $\frac{1}{12}$, neque maior: ergo A, eſt æqualis $\frac{1}{12}$. Quod, &c.

Pr. 25. 1. Prop. 7. 2. Pr. 13. 2. Pr. 44. 1.

Theor. 15. Prop. 16.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima

ma ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt quadruplum plani ſub numero multitudinis aſſumptarum, & numero binario maiore ad ternarium.

C —— D —— F —— E ——

A ———— B ——————————

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate ſint quotlibet aſſumptę A, in multitudine numeri C, & ſuccedentes in infinitum B, Planus etiam ſub C, & numero binario maiore ſit D, cuius quadruplus F, & duodecuplus E. Dico A, ad B, eſſe vt F, ad 3. Et quia C, eſt multitudo magnitudinum A; & D, eſt planus ſub C, & numero binario maiore; & E, duodecuplus D; ergo A, ſunt æquales D, denominato per E, auctum nouenario; & aggregatæ A, B, ſunt æquales vnitati denominatæ per 12. Ergo A, ad aggregatas A, B, ſunt vt D, denominatus per E, auctum 9. ad $\frac{1}{12}$. & (multiplicando per 12.) vt E, denominatus per ſe ipſum auctum 9. ad vnitatem, videlicet vt E, ad E, auctum 9. & diuidendo per 3, vt F, ad F, auctum 3; ergo diuidendo, A, ad B, ſunt vt F, ad 3. Quod, &c.

Pr. 10. 2.
pr. 18. 2.

Theor. 16. Propoſ. 17.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ ad vltimam ſunt, vt productum ex quadruplo

qua-

Digitized by Google

quadrati multitudinis aſſumptarum vnitate minuto in idem quadratum auctum duplo lateris, ad ſexcuplum eiuſdem lateris auctum ternario.

C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ B. $\frac{1}{693}$ H. 297. K. 81. F. 189.

SInt in multitudine numeri E, aſſumptæ A, vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab unitate; quarum ultima B; & ſit G, quadratum ipſius E, auctum duplo lateris eiuſdem; & M, quadruplum eiuſdem quadrati unitate minutum; & L, ſexcuplum eiuſdem E, auctum 3. Dico A, ad B, eſſe ut planum G M, ad L. Sit H, duodecuplum G, auctum nouenario: conſtat A, Pr. 13. 2. ęquales eſſe G, denominato per H: fiat C, unitate minor E; & quadratum C, auctum duplo eiuſdem ſit D; cuius duodecuplus auctus 9. ſit F; quia C, eſt unitate minor E, numero multitudinis A; conſtat C, eſſe multitudinem A, præter B; & A, præter B, æquales, eſſe Pr. 13. 2. D, denominato per F: tandem fiat K, nonuplus exceſſus G, D; conſtat etiam B, æqualem eſſe K, denominato per Pr. 44. 1. planum F H: & quoniam C, eſt æqualis E, unitate minuto; quadratum C, eſt æquale unitati, & quadrato E, dempto duplo E; & (adiecto communi duplo C, uel duplo E, binario minuto) quadratum C, una cum duplo C, uidelicet numerus D, æqualis eſt quadrato E, unitate minuto; eſt autem G æqualis eidem quadrato aucto duplo E; igitur exceſſus G, D, eſt duplus E, auctus unitate; cuius triplus eſt ſexcuplus E, auctus 3; huiuſmodi eſt numerus L; ergo L, eſt triplus exceſſus G, D; & exceſſus G, D, eſt nona pars numeri K; ergo ex æquo L, ad

L K,

C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ B. $\frac{1}{693}$ H. 297. K. 81. F. 189.

K, eſt vt 3. ad 9. & conuertendo K, triplus eſt ad L: quia diximus D, æqualem eſſe quadrato E, vnitate minuto; duodecuplus ipſius D, eſt æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 12; & (adiecto communi 9.) duodecuplus D, auctus 9. videlicet numerus F, eſt æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 3; cuius tertia pars eſt quadruplus quadrati E, minutus vnitate; huiuſmodi eſt numerus M; ergo M, tertia pars eſt ipſius F; & conuertendo F, triplus eſt ad M; videlicet, vt K, ad L; permutandoq; & conuertendo K, ad F, eſt vt L, ad M; ergo K, denominatus per F, æqualis eſt L, denominato per M: quia etiam diximus A, æquales eſſe G, denominato per H; & B, æqualem K, denominato per planum FH; ergo A, ad B, ſunt vt G, denominatus per H, ad K, denominatum per FH; & multiplicando per H, vt G, ad K, denominatum per F; videlicet vt G, ad L, denominatum per M; ergo (multiplicando per M,) A, ad B, ſunt ut planum GM, ad L. Quod, &c.

Theor. 17. Prop. 18.

Vnitatũ, quæ denominãtur ſolidis imparium ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedẽtes in infinitum eſt, vt octuplus numeri ordinis aſsumptæ auctus 4. ad quadruplum quadrati eiuſdem vnitate minutum.

Vni-

A $\frac{5}{63}$ B $\frac{1}{315}$ C —— —— —— ——
G 15 E. 3 D. 35. F. 7

VNitatum, quæ denominantur ſolidis imparium ab vnitate ſit aſſumpta B; cuius ordinis numerus E;& ipſi B, ſuccedentes in infinitum C; ſit etiam D, quadruplus quadrati E, vnitate minutus; & F, duplus E, auctus vnitate: Dico B, ad C, eſſe vt quadruplus F, ad D. Aggregentur in A, tùm B, tùm quæ ipſam B, præcedunt à prima: quia E, eſt numerus ordinis B; eſt etiã multitudinis collectarum in A: fiat G, æqualis quadrato E, aucto duplo lateris eiuſdem; quoniam igitur B, ad A, ſunt vt ſexcuplum E, auctum 3; videlicet vt triplus F, ad planum G D; ſunt autem A, ad C, vt quadruplum G, ad 3; & diuidendo per 4. vt G, ad $\frac{3}{4}$; & multiplicando per D, vt planum G D, ad triplum D, denominatum per 4; ergo ex æquo B, ad C, ſunt vt triplus F, ad triplum D, denominatum per 4; & diuidendo per 3, vt F, ad D, denominatum per 4; & multiplicando per 4, B, ad C, ſunt vt quadruplus F, ad D. Quod, &c.

Pr. 17. 2.

Pr. 16. 2.

Theor. 18. Prop. 19.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumpta non à prima, ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt planus numeri aſſumptarum, & numeri binario maioris auctus duplo plani ſub numeris aſſumptarum, & præcedentium, ad planum ſub numero præceden-

tium, & numero binario maiore auctum ſemper fractione in qua 3. denominatur per 4.

	A. 3.		B. 2.		L. 8.	M. 12.		
D $\frac{1}{15}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{315}$	E. $\frac{1}{693}$	$\frac{1}{1287}$	C ———	———	———	
	F. 15.		K. 20.	H. 35.		G. 189.	I. 429.	

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate ſint aſſumptæ E, non à prima in multitudine numeri B; quas in infinitum ſuccedentes C; & præcedentes D, in multitudine numeri A; ſit autem L, planus numeri B, & numeri binario maioris; & M, duplus plani ſub numeris A, B; & F, planus numeri A, & numeri binario maioris. Dico E, ad C, eſſe vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{3}{4}$ vnitatis. Fiat G, nouenario maior duodecuplo ipſius F; & H, productus ex aggregato A, B, in numerum binario maiorem; & I, no-

Pr.13.2. uenario maior duodecuplo ipſius H: conſtat D, æquales eſſe F, denominato per G; & D, E, ſimul æquales H, de-

Pr.44.1. nominato per I; & E, æquales nonuplo exceſſus H, F, denominato per planum G I; ſit K, exceſſus H, I; ergo E, ad aggregatas A, E, ſunt vt nonuplus K, denominatus plano G, ad H, denominatum per I; & multiplicando per I, vt nonuplus K, denominatus per G, ad H; & multiplicando per 4. vt quater nonuplus, vel ter duodecuplus K,

Pr.16.2. denominatus per G, ad quadruplum H; ſunt autem aggregatæ A, E, ad C, vt quadruplus H, ad 3; ergo ex æquali E, ad C, ſunt vt ter duodecuplus K, denominatus per G, ad 3; & diuidendo per 3, vt duodecuplus K, denominatus per G, ad vnitatem; & multiplicando per G, vt duodecuplus K, ad G, vel ad duodecuplum F, auctum

9; &

9; & diuidendo per 12. vt K, ad F, auctum $\frac{9}{12}$, vel $\frac{3}{4}$: & quoniam ſunt quatuor magnitudines A, aggregatum ex A, B, & numeri binario maiores ipſis, eodem exceſſu B, ſe ſe excedentes; ergo planum ſub maioribus, videlicet H, excedit planum ſub minoribus, videlicet F, plano ſub B, & aggregato ex maxima, & minima, videlicet ex binario, B, & duplo A; planum autem ſub B, & compoſito ex binario, & B, eſt L; & planum ſub B, & duplo A, eſt M; ergo exceſſus H, F, videlicet K, eſt æqualis aggregato L, M; ergo E, ad C, ſunt vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{3}{4}$. Quod, &c. Prop.1.2.

Theor. 19. Prop. 20.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumpta à prima, ſunt æquales fractioni, cuius numerator eſt multiplex plani ſub multitudine aſſũptarum, & exceſſu aucti exceſſu, & binario, per eamdẽ multitudinem; denominator verò multiplex numeratoris per duplum compoſiti ex quadrato, & numero exceſſus, auctus duplo quadrato compoſiti ex eodem exceſſu, & vnitate.

Sint

A $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{280}$ $\frac{1}{910}$ $\frac{1}{2080}$ $\frac{1}{3952}$ $\frac{1}{6688}$ $\frac{1}{10450}$

B. 3. C. 7. D. 21. E. 24. F. 25. G. 26.

L. 4. N. 22. I. 24. H. 182. K. 4368.

SInt A, vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate cum exceſſu B, ſumptæ in multitudine numeri C; ſit autem D, planum C B; & D, auctus B, ſit E; quo ſingulis duabus vnitatibus aucto fiant F, & G: conſtat G, eſſe æqualem plano C B, aucto B, & binario: & quia C, eſt multitudo A; & terni Arithmeticè diſpoſiti denominant ſingulas A; ergo numerus binario maior C, eſt multitudo eorum, qui adhibētur in denominatione ſumptarum A; & propterea C, multitudo eſt intermediorum, præter extremos; ſed quot ſunt intermedij, totuplex eſt exceſſus penultimi, & vnitatis ad exceſſum conſequentium; ergo planum B C, videlicet numerus D, eſt exceſſus penultimi, & vnitatis; & D, auctus B, videlicet E, eſt exceſſus vltimi, & vnitatis; & E, auctus vnitate videlicet F, eſt vltimus; & G aggregatum extremorum F, & unitatis: ex ductu G, in C, fiat H; conſtat etiam H, eſſe duplum aggregati intermediorum. Sit I, duplum compoſiti ex quadrato, & numero B; & ex ductu H, in I, fiat K; & compoſitum ex B, & unitate ſit L; conſtat L, eſſe ſecundum Arithmeticè diſpoſitorum ab unitate. Dico A, æquales eſſe H, denominato per compoſitum ex K, & duplo quadrati L. Fiat N, compoſitus ex D, & vnitate; conſtat N, eſſe penultimum Arithmeticè diſpoſitorum ab unitate; ergo diſpoſitionis Arithmeticæ primi ſunt vnitas, & L; ultimi uero N, & F; & extremi unitas, & F: quoniam unitas ad duplum B; vel H, ad duplum plani B H; vel dimidium H, ad planum B H, eſt vt aggregatum intermediorum ad exceſſum plani N F, ſuper L, planum unitatis, & L; eſt autem aggregatum

(left margin, beside "fiat H; conſtat etiam H"): Pr. 2. 2.

(left margin, beside "vel H, ad duplum plani B H"): pr. 3. 2.

Digitized by Google

gatum intermediorum dimidium H; ergo exceſſus plani N L, ſuper L, eſt planum B H; & planum N F, eſt æquale plano B H, & L; & ſolidum L N F, eſt æquale ſolido L B H, aucto quadrato L; quoniam autem L, eſt æqualis B, & unitati; planum L B, eſt æquale compoſito ex quadrato B, & numero B; videlicet dimidio I; ergo ſolidum L B H, eſt æquale dimidio plani H I; uidelicet dimidio K; ergo ſolidum L N F, uel planoplanum unitatis, L, N, & F, eſt dimidium K, auctum quadrato L; ergo A ſunt Pr.4.2.
æquales dimidio H, denominato per dimidium K, auctum quadrato L; & multiplicando utrumque numerum fractionis per 2. ſunt æquales H, denominato per K, auctum duplo quadrato L. Quod, &c.

Theor. 20. Prop. 21.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt minores vnitate denominata duplo compoſiti ex quadrato, & numero exceſſus.

C —— —— —— —— —— ——

D —— E —— F —— G ——

SInt C, quotlibet unitates denominatæ ſolidis omniũ Arithmeticè diſpoſitorum ab unitate, ſumptæ in qualibet multitudine à prima; & ſit D, duplum compoſiti ex quadrato, & numero exceſſus diſpoſitionis Arithmeticæ. Dico C, minores eſſe unitate denominata D. Sit

E,

Digitized by Google

E, multiplex plani multitudinis aſſumptarum, aucti numero exceſſus, & binario, per eamdem multitudinem; & F, multiplex E, per D; & G, duplum quadrati compoſiti
Pr. 20. 2. ex eodem exceſſu, & unitate; ergo C, ſunt æquales E, denominato per F, auctum G; & C, ad unitatem ſunt ut E, denominatus per F, auctum G, ad unitatem; uidelicet ut E, ad compoſitum ex F, & G; habet autem E, ad compoſitum ex F, & G, minorem proportionē quàm E, ad F; & E, ad F, eſt ut unitas ad D; uel ut unitas denominata per D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem habent minorem proportionem, quàm unitas denominata per D, ad eamdem unitatem; ergo C, ſunt minores unitate denominata per D. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Pr. 15. 1. *Vnde conſtat vnitates denominatas ſolidis omnium numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis.*

Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quod vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earundem in infinitum.*

Probl.

Digitized by Google

Probl. 2. Prop. 22.

Datis tribus numeris, quartum inuenire, qui non minorem primo dato metiatur per planum ſui ipſius, & alterius dati, auctum tertio dato.

B.41. C.4. D.2. E.℞.168. F.℞.2 $\frac{5}{8}$ G.$\frac{2}{8}$ A.3.

SInt B, C, D, tres numeri dati, opportet inuenire quartum, qui metiatur numerum non minorem dato B, per planum ſui ipſius, & C, auctum D. Aggregati ex quadrato D, & quadruplo plani B C, ſit radix quadrata E; quæ diuidatur per duplum C, vt fiat quotiens F: item D, diuidatur per duplum C, vt fiat quotiens G, & ſit A, non minor exceſſu F, G. Dico A, metiri numerum non minorem B, per planum A C, auctum D. Quoniam A, non eſt minor exceſſu F, G; ergo aggregatum AG, non eſt minus F; & (multiplicando per duplum C,) duplum aggregati ex planis A C, G C, non eſt minus duplo plani F C: & quia G, eſt quotiens diuiſionis D, per duplum C; duplum plani G C, eſt numerus D: item quia F, eſt quotiens diuiſionis E, per duplum C; duplum plani F C, eſt E; ergo aggregatum ex duplo plani AC, & D, non eſt minus E; & quadratum aggregati ex duplo plani A C, & numero D, videlicet aggregatum ex quadruplo planoplani quadratorum A, C, & quadruplo ſolidi ACD, & quadrato D, non eſt minus quadrato E, videlicet aggregato ex quadrato D, & qua-

 druplo

Digitized by Google

druplo plani B C ; & (dempto prius communi quadrato D, nec non diuidendo per quadruplum C,) aggregatum ſolidi ſub C , & quadrato A , & plani A D , non eſt minus B : ſed A , metitur aggregatum ſolidi ſub C , & quadrato A , & plani AD, per planum AC, auctum D; ergo A , metitur numerum non minorem B, per planum AC , auctum D . Quod , &c.

Theor. 21. Prop. 23.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum Arithmeticæ diſpoſitionis ab vnitate , diſpoſitæ in infinitum , & aggregatæ ſunt æquales vnitati denominatæ per duplum compoſiti ex quadrato , & numero exceſſus conſequentiũ eiuſdem diſpoſitionis.

A ———————————— L. 24. M. $\frac{1}{24}$
B — C — I — D — E — F — N. 16. O. 3. P. 5. G ——
H ————————————

SInt in A , diſpoſitæ in infinitum , & aggregatæ vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum Arithmeticæ diſpoſitionis ab vnitate ; & ſit L , duplus compoſiti ex quadrato , & numero exceſſus conſequentium eiuſdem Arithmeticæ diſpoſitionis ; & M , ſit vnitas denominata per L. Dico , quod A , eſt æqualis M. Aliàs
Coroll. 2. pr. 21. 2. erit A , maior , vel minor M. Sit maior ; igitur in aliqua multitudine ſumptæ à prima vnitates in A , diſpoſitæ implent M : ſit huiuſmodi multitudinis numerus B , qui vnitate

Digitized by Google

vnitate adiecta fiat C; ergo aliquot vnitates in A, diſpo- Def. 10.
ſitæ ſumptę à prima in multitudine numeri C, ſunt maio-
res M; quod eſt abſurdum: non eſt igitur A, maior M. Pr. 21. 2.
Sit minor; & data proportione minoris inæqualitatis A, Pr. 25. 1.
ad M, inueniatur altera maior, quæ ſit numeri I, quem
L, metiatur per D, ad E, numerum vnitate maiorem; &
& ipſius D, fiat multiplex F, per N, quadratum compo-
ſiti ex exceſſu conſequentium, & vnitate; & datis tribus Pr. 22. 2.
numeris F, exceſſu diſpoſitionis O, & P, aggregato ex
O, & binario, quartus inueniatur G, qui metiatur nu-
merum non minorem F, per planum GO, auctum P; &
ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudi-
ne numeri G; & aſſumptarum ſumma ſit H: conſtat H,
eſſe portionem ipſius A; & æqualem producto ex nume- Pr. 20. 2.
ro G, in planum GO, auctum P, denominato per mul-
tiplex eiuſdem producti ſecundum L, auctum N: quia
autem productus ex G, in planum GO, auctum P, non
eſt minor F; etiam denominatus per ſui ipſius multiplicē Pr. 44. 1.
ſecundum L, auctum N, non eſt minor F, denominato
per multiplicem F, ſecundum L, auctum N; & (diuiden-
do vtrumq; numerum fractionis per N,) non eſt minor
D, denominato per multiplicem D, ſecundum L, auctum
vnitate; eſt autem I, multiplex D, ſecundum L; & I,
auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denomi-
nato per E: ſed, quia D, ad I, eſt vt vnitas ad I; vel vt
M, (vnitas denominata per L,) ad vnitatem; & I, ad
E, maiorem proportionem habet, quam A, ad M; ergo
ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus
per E, ad vnitatem habet maiorem proportionē, quam
A; maior igitur eſt D, denominatus per E, quam A; &
non eſt H, minor D, denominato per E; ergo H, eſt
maior A, pars toto, quod eſt abſurdum: non igitur A,
minor eſt M, neque maior: ergo A, eſt æqualis M.
Quod, &c.

Digitized by Google

Theor. 22. Propoſ. 24.

Vnitates denominatæ ſolidis numerorũ Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumpta à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex plano exceſſus conſequentium Arithmeticè diſpoſitorum, & multitudinis aſſumptarum ducto in ſe ipſum auctum eodem exceſſu, & binario, ad compoſitum ex eodem exceſſu, & vnitate.

A.2. B.3. D.6. C.11. L.22. E.66. F.4. I.12. G.264. H.16.
R. $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{280}$ S ——— ——— —— ——— ——— ——— ———

SInt R, quotlibet vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, cum exceſſu B, ſumptæ à prima in multitudine numeri A; ſuccedentes verò in infinitum ſint diſpoſitæ, & aggregatæ in S; & planum AB, ſit D; & D, auctus B, & binario ſit C; & ex ductu C, in A, fiat L; & ex L, in B, fiat E: conſtat E, eſſe productum ex D, in C: ſit F, compoſitus ex B, & vnitate. Dico R, ad S, eſſe, vt E, ad F. Ducatur F, in B, vt fiat I: conſtat I, eſſe compoſitum ex quadrato, & numero B: ducatur etiam F, in E, vt fiat G: quoniam E, eſt productus LB; ergo G, eſt productus L B F; eſt autem I, productus B F; ergo G, eſt productus

L I:

L I: fiat ipſius F, quadratum H: conſtat R, eſſe æquales Pr. 20. 1.
L, denominato per duplum G, auctum duplo H; & ag- Pr. 23. 2.
gregatas R, S, æquales eſſe vnitati denominatæ per duplum I; Ergo R, ad aggregatas R, S, ita ſe habent vt L, denominatus per duplum G, auctum duplo H, ad vnitatem denominatam duplo I; & multiplicando per 2. vt L, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem denominatam per I; & multiplicando per I, vt productum L I, videlicet G, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem; & (multiplicando per G, auctum H,) ita ſe habent R, ad aggregatas R, S, vt G, ad compoſitum ex G, H; & diuidendo, R, ad S, ita ſe habent vt G, ad H; uidelicet ut planum F E, ad quadratum F; & (diuidendo per F,) ſunt R, ad S, ut E, ad F. Quod, &c.

Theor. 23. Prop. 25.

Productus duorum laterum eſt maior, quàm vt ad eorumdem differentiam ſit, vt minus latus ad vnitatem; & exceſſus eſt minoris lateris quadratus.

A. 5. C. 3. B. 2.

SInt duæ magnitudines A, B; quarum ſit B, minor; & differentia C. Dico quod productus AB, minutus quadrato B, ad C, eſt vt B, ad vnitatem. Quoniã A, æqualis eſt aggregato C, B; productus AB, eſt æqualis aggregato producti C B, & quadrati B; ergo productus

ctus AB, minutus quadrato B, eſt æqualis producto C B; eſt autem productus CB, ad C, vt B, ad vnitatem; ergo productus AB, minutus quadrato B, ad C, eſt vt B, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 24. Prop. 26.

Vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum, quotlibet aſſumptæ ſunt minores vnitate denominata ſolido ſub duplo exceſſu, & minimis numeris.

B. 2. C. 5. 8. E. 11. F. 14.
A $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ D. 6.

SInt in A, diſpoſitæ quotlibet vnitates denominatæ ſolidis Arithmeticè diſpoſitorum; quorum primus B; ſecundus C; & duplus exceſſus conſequentium D. Dico A, minores eſſe vnitate denominata ſolido BCD. Arithmeticè diſpoſitorum, qui adhibentur in denominatione vnitatum A, ſint penultimus E, & vltimus F: Pr. 4. 2. ergo A, ſunt æquales aggregato ex intermedijs, præter B, F, denominato per planoplanum BCEF; ergo A, ad vnitatem ſunt, vt aggregatum ex intermedijs præter B, F, ad planoplanum BCEF; videlicet proportionem habent compoſitã ex proportionibus intermediorũ præter B, F, ad exceſſum planorum EF, BC, & huius exceſſus Prop. 3. 2. ad planoplanum BCEF: eſt autem proportio intermediorum præter B, F, ad exceſſum planorum EF, BC,

eadem

Digitized by Google

eadem proportioni vnitatis ad D; & proportio exceſſus Pr.25.2.
planorum EF, BC, ad planoplanum BCEF, minor proportione vnitatis ad planum BC; vel multiplicando per D, minor proportione D, ad ſolidum DBC; ergo ex æquo proportio intermediorum pręter AF, ad planoplanum BCEF, minor eſt proportione vnitatis ad ſolidum DBC; & aggregatum intermediorum præter B, F, denominatum planoplano BCEF, videlicet A, minor eſt vnitate denominata ſolido DBC. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Vnde conſtat vnitates denominatas ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis. Pr.15.1.

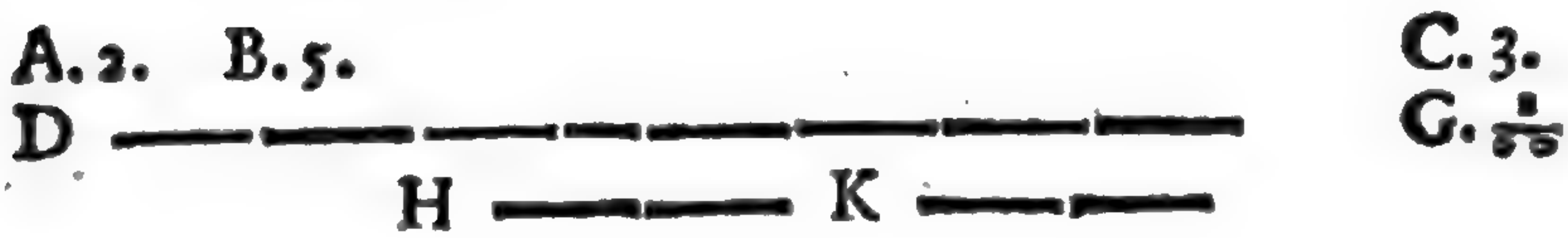
Corollarium Secundum.

Patet etiam, quod vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum in aliqua multitudine ſunt à prima, quæ implent propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarũ earumdẽ in infinitũ. Pr.16.1.

Theor.

Theor. 25. Prop. 27.

Vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum in infinitum diſpoſita, & aggregatæ ſunt æquales vnitati denominatæ ſolido ſub duplo exceſſu, & minimis numeris.



Sint numerorum Arithmeticè diſpoſitorum minimi numeri A, B; quorum exceſſus C; & vnitates denominatæ ſolidis eorumdem in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſint in D; & vnitas denominata ſolido ſub duplo C, & plano AB, ſit G. Dico D, eſſe æqualem G.
Coroll. 2. pr. 26. 2. Alias erit D, maior, vel minor G: ſit maior; igitur in aliqua multitudine ſumptæ D, à prima implent G: ſit huiuſmodi multitudinis numerus H, qui vnitate adiecta
Def. 10. fiat K; ergo aliquot diſpoſitæ à prima magnitudines D,
Pr. 26, 2. ſumptæ in multitudine numeri K, ſunt maiores G; quod eſt abſurdum: non eſt igitur D, maior G.

Sit D, minor G; & ſit defectus I; & vt I, ad G, ita fiat plani AB, quadratus ad Q; & ex diuiſione Q, per planũ
Pr. 7. 2. A B, fiat M; & inueniatur numerus N, qui multiplicando ſeipſum auctum numero C, producat numerum non minorem

A. 2. B. 5. O —— P —— C. 3.
D ——————————————— I —— G. $\frac{1}{60}$
Q —— M —— N ——

minorem M; & inter Arithmeticè diſpoſitos inueniantur duo numeri conſequentes O, P, maiores numero N; ergo etiam planum O P, maius eſt plano numeri N, ducti in ſeipſum auctum numero C; & multò maius eſt, quam M; & (multiplicando per planum AB,) planoplanum ABOP, maius eſt ſolido A B M, videlicet numero Q; eſt autem numerus Q, ad quadratum plani A B, vt G, ad I; ergo planoplanum ABOP, ad quadratum plani AB, maiorem habet proportionem, quam G, ad I; & per conuerſionem rationis, planoplanum ABOP, ad exceſſum eiuſdem ſuprà quadratum plani AB, minorem habet proportionem, quàm G, ad D; habet autem exceſſus planoplani ABO Pr. 25. 2.
P, ſupra quadratum plani A B, ad exceſſum planorum O P, A B, proportionem eamdem, quàm planum A B, ad vnitatem; vel eamdem, quàm vnitas ad vnitatem denominatam plano A B; vel (diuidendo per duplum C,) eamdem, quàm vnitas denominata duplo C, ad vnitatem denominatam ſolido ſub duplo C, & AB, videlicet ad G; ergo ex æquali in perturbata planoplanum ABOP, ad exceſſum planorum O P, A B, minorem habet proportionem, quàm vnitas denominata duplo G, ad D; & conuertendo exceſſus planorum O P A B, ad planoplanum A B O P, maiorem habet proportionem, quàm D, ad vnitatem denominatam duplo C; eſt autem Pr. 3. 2.
aggregatum intermediorum numerorum Arithmeticè diſpoſitorum inter A, P, ad exceſſum planorum O P, A B, vt vnitus ad duplum C; vel vt vnitas denomina-

ta duplo C, ad vnitatem; ergo ex æquali in perturbata aggregatum intermediorum inter A, P, ad planoplanum A B O P, maiorem habet proportionem, quàm D, ad vnitatem; & aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planoplano A B O P, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quàm D, ad eamdem vnitatem; Ergo aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planoplano ABOP, maius eſt quàm D:

A. 2. B. 5. O —— P —— C. 3.
D ——————————————— I —— G. $\frac{1}{80}$
Q —— M —— N ——
R ——————————

quot autem ſunt inter A, P, intermedij, totidem aſſumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt in D; quarum aſſumptarum aggregatum ſit R: conſtat R, eſſe partem, vel portio-
Pr. 4. 2. nem ipſius D; & conſtat etiam R, eſſe æqualem aggregato intermediorum A, P, denominato per planoplanum A B O P; ergo R, eſt maius D, pars toto, quod eſt abſurdum: non ergo D, eſt minor G, neque maior; ergo D, eſt æqualis ipſi G. Quod, &c.

✠

Theor.

Digitized by Google

Theor. 26. Prop. 28.

Vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum, quotlibet aſſumptæ ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt exceſſus plani, qui fit à maximis numeris adhibitus in denominatione aſſumptarum ſupra planum, qui fit à minimis, ad idem planum à minimis contentum.

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.

F. $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ G. ———————

NVmerorum Arithmeticè diſpoſitorum ſint A, B, minimi cum exceſſu E; & ſint F, quotlibet aſſumptæ, & aggregatæ vnitates denominatæ ſolidis numerorum diſpoſitorum Arithmeticè ab A, B; & in ipſarum F, denominatione ſint adhibiti numeri C, D, maximi; & ipſis F, ſuccedentes in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſint G. Dico F, ad G, eſſe vt exceſſus planorum CD, AB, ad planum AB. Quoniam F, ſunt æquales aggregato intermediorum Arithmeticè diſpoſitorum inter A, D, denominato per planoplanum AB CD; & G, ſunt æquales vnitati denominatæ ſolido ſub duplo E, & plano CD; igitur F, ad G, ſunt vt aggregatum intermediorum inter A, D, denominatum pla-

Pr. 4. 2.

Pr. 17. 2.

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.
F. $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ G. ————————

noplano A B C D, ad vnitatem denominatam ſolido ſub duplo E, & plano C D; & multiplicando per planum C D, ſunt vt aggregatum intermediorum A, D, denominatum plano A B, ad vnitatem denominatam duplo E; & multiplicando per duplum E, vt exceſſus
Pr. 3. 2. planorum C D, A B, (eſt enim exceſſus huiuſmodi multiplex aggregati intermediorum inter A, D, vt duplum E, vnitatis) denominatus plano A B, ad vnitatem; & multiplicando etiam per planum A B, ſunt F, ad G, vt exceſſus planorum C D, A B, ad planum A B. Quod, &c.

Finis Libri Secundi.

NOVAE

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ,

SEV

De Additione Fractionum

LIBER TERTIVS,

In quo eorum, quæ ſuperioribus Libris demonſtrata ſunt, generaliora traduntur principia.

Theorema 1. Propoſitio 1.

Diſpoſitis quomodolibet magnitudinibus, vt aſſumptis totidem ſemper ſecundum aliquem numerum, ſingulæ excedant ſingulas præcedentes pariter totidem ſumptas ordinis eiuſdem; ex denominatione huiuſmodi exceſſuum magnitudinum ordinis eiuſdem per productum tùm ex magnitudinibus, quarum ſunt exceſſus, tùm etiam ex inter-

medÿs

medijs, fiunt fractiones, quarum aggregatum eſt exceſſus productorum totidem laterum ab extremis hinc inde, denominatus per productum dupli numeri laterum ab ijſdem extremis.

A — B — C — D — E — F — G — H —
I — K — L — M — N — P —
Q — R — S — T — X — Y —

DIſpoſitis quomodolibet magnitudinibus A, B, C, D, E, F, G, vt aſſumptis totidem ſemper ſecundum aliquem numerum, vtpote ſingulæ D, E, F, ſuperent ſingulas totidem ſumptas præcedentes A, B, C, & ſimiliter E, F, G, ſuperent B, C, D, & ſic deinceps; ex denominatione exceſſus D, A, per productum earumdem excedentium D, A, & intermediarum B, C, fiat fractio I; & ſimiliter ex denominatione exceſſuum E, B; F, C; G, D; H, E, per productos B C D E, CDEF, DEFG, EFGH, fiant fractiones K, L, M, N; & quot ſunt A, B, C, vel D, E, F, &c. totidem ſint extremæ maximæ F, G, H, & minimæ A, B, C; & ex denominatione exceſſus producti extremarum hinc inde FGH, ABC, per productum omnium earumdem extremarum ABCFGH, fiat fractio P. Dico I, K, L, M, N, aggregatas æquales eſſe P. Ex totidem ſemper conſequentibus ABC, BCD, &c. fiant producti Q, R, S, T, X, Y: quoniam Q, eſt productum ABC; & R, productum BCD; planum QR, eſt productum ex productis ABC, BCD; ergo A, D, & productus ABCD, ſunt homologi rationis eiuſdem laterum Q, R, & eorumdem laterum plani

QR,

QR; ergo exceſſus D, A, ad productum ABCD, eſt vt exceſſus R, Q, ad planum QR; ergo exceſſus D, A, denominatus producto ABCD, videlicet fractio I, eſt æqualis exceſſui R, Q, denominato plano QR: ſimiliter demonſtrabimus K, L, M, N, æquales exceſſibus S, R; T, S; X, T; Y, X, denominatis planis RS, ST, TX, XY; ergo colligendo I, K, L, M, N, ſunt æquales exceſſibus conſequentium Q, R, S, T, X, Y, denominatis eorumdem conſequentiũ planis; videlicet vni exceſſui extremorum Y, Q, denominato eorumdem extremorum plano QY: eſt autem Y, productum FGH; & Q, productum ABC; ergo exceſſus Y, Q, denominatus plano QY, eſt æqualis exceſſui productorum FGH, ABC, denominato producto ABCFGH, videlicet fractioni P: ergo I, K, L, M, N, compoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales P. Quod, &c. Pr. 7. 1.

Theor. 2. Prop. 2.

Diſpoſitis Arithmeticè magnitudinibus, exceſſus producti quotlibet laterum à maximis extremis, ſuprà productum totidem laterum à minimis extremis, ad aggregatum productorum numeri laterum vnitate minoris factorum ab iiſdem diſpoſitis conſequentibus, præter primam, & vltimam, habet proportionem compoſitam, tùm exceſſus diſpoſitionis, tùm etiam numeri multi-

tudinis

tudinis laterum productorum excedentium ad vnitatem.

A — B — C — D — E — F — G — H —

SInt Arithmeticè diſpoſitæ quotlibet magnitudines A, B, C, D, E, F, G, H; & à maximis extremis fiat productum trium laterum FGH; & à minimis extremis productum totidem laterum ABC. Dico exceſſum productorum FGH, ABC, ad aggregatum productorum duorum laterum, qui fiunt à conſequentibus, præter primam, & vltimam A, H, videlicet ad compoſitum ex planis BC, CD, DE, EF, FG, habet proportionem compoſitam, tùm exceſſus B, A, tùm etiam ternarij numeri multitudinis laterum F, G, H, ad vnitatem. Sit E, in diſpoſitione propoſita proxima minor F: quoniam exceſſus H, E, ad exceſſum B, A, eſt vt 3. multitudo numerorum F, G, H, ad vnitatem; addita communi proportione exceſſus B, A, ad vnitatem, ergo exceſſus H, E, ad vnitatem habet proportionem compoſitã, tùm exceſſus B, A, tùm ternarij ad vnitatem: ducatur E, in proximas maiores magnitudines F, G, vt fiat EFG, productus totidem laterum, quot eſt FGH; ergo planum FG, ad productum EFG, eſt vt vnitas ad E; eſt autem productus EFG, ad productum FGH, vt E, ad H; & diuidendo, productus EFG, ad exceſſum productorum FGH, EFG, vt E, ad exceſſum H, E; ergo ex æquali planum FG, ad exceſſum productorum FGH, EFG, eſt vt vnitas ad exceſſum H, E; & conuertendo, exceſſus productorum FGH, EFG, ad planum FG, eſt vt exceſſus H, E, ad vnitatem: ſimiliter demonſtrabimus, quòd ſinguli exceſſus productorum EFG, DEF, CDE, BCD, ABC, ad ſingula plana EF, DE, CD, BC, AB, ſunt vt

exceſſus

exceſſus H, E, ad vnitatem: ergo colligendo, exceſſus productorum FGH, ABC, ad aggregatum planorum AB, BC, CD, DE, EF, FG, eſt vt exceſſus H, E, ad vnitatem; videlicet proportionem habet compoſitam, tùm exceſſus B, A, tùm etiam numeri multitudinis laterum F, G, H, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 3. Prop. 3.

Diſpoſitis Arithmeticè quotlibet magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper conſequentium, ſunt æquales aggregato productorum numeri laterum binario minoris, factorum ab ijſdem diſpoſitis conſequentibus, præter primam, & vltimam, denominato per planum ſub duobus totidem hinc inde extremarum productis numeri laterum vnitate minoris.

A — B — C — D — E — F — G —
H — I — K — L — M —
N — O — P — Q — R —

Sint diſpoſitæ Arithmeticè magnitudines quotcunq; A, B, C, D, E, F, G; & vnitates denominatæ productis earumdem (ex.gr.) quaternarum ſint H, I, K, L; & aggregatum productorum ex binis ijſdem, præter primam A, & vltimam G, denominatum per planum ſub

A — B — C — D — E — F — G —
H — I — K — L — M —
N — O — P — Q — R —

duobus ternorum laterum hinc inde extremorum pro-
ductis ABCEFG, ſit M. Dico, quod H, I, K, L, ſunt
æquales M. Sumantur A, B, C, D, E, F, G, ternæ; &
ſingularum, quæ ternę ſumuntur exceſſus ſupra ſingulas
præcedentes denominentur productis earumdem, qua-
rum ſunt exceſſus, & intermediarum (qui producti ſunt
ſinguli quaternorum laterum) vt fiant fractiones N, O,
P, Q, & exceſſus productorum à ternis hinc inde extre-
mis EFG, ABC, denominatus omnium earumdẽ extre-
Pr. 1.3. morum producto ABCEFG, ſit R; ergo N, O, P, Q, ſunt
æquales R: & quia N, O, P, Q, ſinguli ſunt exceſſus
earum, quæ ternæ ſumuntur denominati productis qua-
ternarum (vt exceſſus D, A, denominatus producto AB
CD,) & H, I, K, L, ſingulæ ſunt vnitates denominatæ
ſimiliter; ergo ſinguli N, O, P, Q, ad ſingulas H, I, K, L,
ſunt vt exceſſus D, A, ad vnitatem; videlicet proportio-
nem habent compoſitam exceſſus D, A, ad exceſſum
conſequentium B, A, & huius ad vnitatem: eſt autem
exceſſus D, A, ad exceſſum B, A, vt 3. ad vnitatem; ergo
exceſſus D A, ad vnitatem habet compoſitam propor-
tionem tùm exceſſus B, A, tùm etiam 3. ad vnitatem:
Pr. 2 3. quæ compoſita eadem eſt proportioni exceſſus produ-
ctorum trium laterum ab extremis factorum EFG, ABC,
ad aggregatum productorum ex binis iiſdem, præter A,
G; & (diuidendo per productum omnium extremarum
ABCEFG,) eadem eſt proportioni R, ad M: ergo
ſingulæ magnitudines N, O, P, Q, ad ſingulas H, I, K,
L, ſunt vt R, ad M; & colligendo omnes, N, O, P, Q,
ad omnes H, I, K, L, ſunt vt R, ad M; & permutan-
do,

Digitized by Google

do, quia N, O, P, Q, ſunt æquales R; etiam H, I, K, L, ſunt æquales M. Quod, &c.

Theor. 4. Propoſ. 4.

Diſpoſitis Arithmeticè quotlibet magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper in diſpoſitione, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ex minimis numeri laterum vnitate minoris, tùm ad numerum laterũ eiuſdem producti, tùm etiam ad exceſſum diſpoſitionis Arithmeticæ.

B —— C —— D —— —— E —— F —— G ——
A ———————————————————————— H ——

SInt diſpoſitæ Arithmeticè quotlibet magnitudines, quarum B, C, D, minimæ; & E, F, G, maximæ, cum exceſſu H; & vnitates denominatæ productis quatuor ſemper laterum ſint A. Dico, quòd A, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum BCD, tùm ad 3. numerum laterum B, C, D, tùm etiam ad H. Quoniam B, C, D, &c. ſunt Arithmeticè diſpoſitæ, ergo A, ſunt Pr. 3. 3.
æquales aggregato productorum duorum ſemper laterũ ex ipſis diſpoſitis præter B, G, denominato per planum

B —— C —— D —— —— E —— F —— G ——
A ———————————————— H —

ex productis trium laterum BCD, EFG: ergo A, ad vnitatem ſunt vt aggregatum productorum duorum ſemper laterum ex diſpoſitis præter B, G, ad planum ex productis trium laterum BCD, EFG; videlicet proportionem habent compoſitam dicti aggregati productorum duorum laterum à conſequentibus præter B, G, ad differentiam productorum trium laterum ab extremis EFG; BCD, & huiuſmodi differentiæ ad eorumdem productorum
Pr. 2 3. planum BCDEFG; aggregatum autem productorum duorum laterum à conſequentibus ad differentiam productorum trium laterum ab extremis proportionem habet compoſitam vnitatis tùm ad 3. numerum laterum BCD, tùm etiam ad H; ergo A, ad vnitatem habent proportionem compoſitam vnitatis tùm ad 3. tùm ad H, & differentiæ productorum EFG, BCD, ad productum
Pr. 25 2. BCDEFG: quoniam autem productum BCDEFG, maius eſt quàm vt ad differentiam productorum EFG, BCD, eamdem habeat proportionem, quam productus BCD, ad vnitatem; conuertendo, differentia productorum EFG, BCD, ad productum BCDEFG, minorem habet proportionem, quàm vnitas ad productum BCD; ergo (addendo communem proportionem compoſitam vnitatis tùm ad 3. tùm etiam ad H,) A, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum BCD, tùm ad 3. numerum laterum BCD, tùm etiam ad H. Quod, &c.

Corol-

Corollarium Primum.

Vnde conſtat, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem ſemper magnitudinum Arithmeticè diſpoſitarū, quotlibet aſſumptæ ſunt minores vnitate denominata ſolido ſub producto à minimis numeri laterum vnitate minoris, ſub eodem laterum numero, & ſub exceſſu diſpoſitionis.

Corollarium Secundum.

Conſtat præterea, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem ſemper magnitudinum Arithmeticè ordinatarum, in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt extenſionis finitæ. Pr. 15. 1.

Corollarium Tertium.

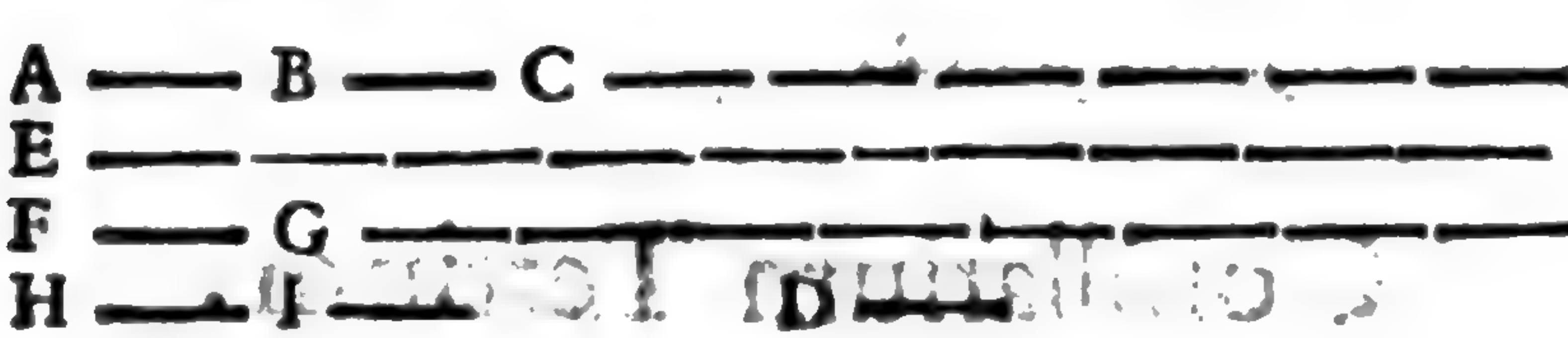
Manifeſtum tandem eſt, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem ſemper Pr. 16, 1.

magni-

magnitudinum Arithmeticè ordinatarũ, in aliqua multitudine ſunt à prima, quæ propoſitam implent extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum.

Theor. 5. Prop. 5.

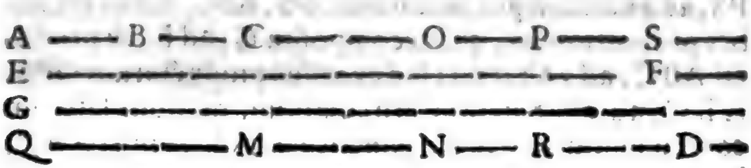
Diſpoſitis Arithmeticè magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper in diſpoſitione, ordinatæ in infinitum, & compoſitæ ad vnitatem habent proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ex minimis numeri laterum vnitate minoris, tùm ad numerum laterum eiuſdẽ producti, tùm etiam ad exceſſum diſpoſitionis Arithmeticè.



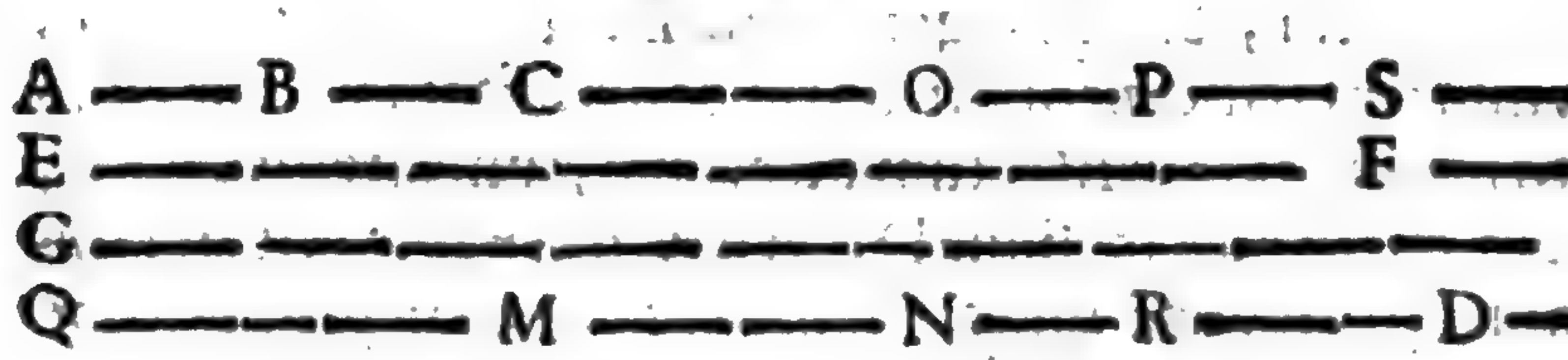
MAgnitudinum Arithmeticè diſpoſitarũ in infinitum ſint minimæ ABC, & exceſſus D; vnitates autem denominatæ productis quatuor ſemper laterum ordi-

ordinentur, & aggregentur in E. Dico, quod E, ad vnitatem habet proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ABC, tùm ad 3. numerum laterum ABC, tùm etiam ad exceſſum D. Aliàs E, maior, eſt vel minor, quàm vt ad vnitatem habeat eamdem proportionẽ compoſitam: ſit maior; & ſit exceſſus F; & ab E, deducto F, relinquatur G; ergo G, ad vnitatem habet prædictam proportionem compoſitam: quoniam E, maior eſt G; ergo in aliqua multitudine ſumptæ à prima magnitudines in E, diſpoſitæ implent G: ſit huiuſmodi multitudinis numerus H; qui adiecta vnitate fiat I; ergo magnitudines in E, diſpoſitæ ſumptæ in multitudine I, ſunt maiores G; videlicet ſunt maiores, quàm vt ad vnitatẽ habeant prædictam proportionem compoſitam; quod eſt abſurdum: ergo E, non eſt maior, quàm vt ad vnitatem habeat proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum A B C, tùm ad 3. numerum laterum A B C, tùm etiam ad exceſſum D.

Coroll.3. prop.4.3.
Def. 10.
Coroll. 1. prop.4.3.



Sit E, minor G; & ſit defectus F; & vt F, ad G, ità fiat producti A B C, quadratus ad Q; & ex diuiſione Q, per productum ABC, fiat quotiens M; & magnitudinis M, tamquàm producti totidem laterum æqualium, quot ſunt A B C, latus inueniatur, vtpote radix cubica, quæ ſit N; & inter magnitudines Arithmeticè diſpoſitas inueniantur tres, vel quot ſunt A, B, C, totidem magnitudines conſequentes O, P, S, maiores prædicta radice N: ergo productum O, P, S, maius eſt producto totidem laterum æqualium ipſi N, videlicet magnitudine



gnitudine M; & multiplicando per productum A B C,
productum ABCOPS, maius eſt producto ABCM, videlicet Q; eſt autem Q, ad quadratum producti ABC, vt G, ad F; ergo productum ABCOPS, ad quadratum producti ABC, maiorem habet proportionem, quam G, ad F; & per conuerſionem rationis, productum ABCO PS, ad exceſſum eiuſdem ſupra quadratum producti A BC, minorem habet proportionem, quàm G, ad E; ha-
Pr.25.2. bet autèm exceſſus producti ABCOPS, ſupra quadratum producti A B C, ad exceſſum productorum O P S, ABC, proportionem eamdem, quam productus ABC, ad vnitatem; qua communi adiecta, productus ABCO PS, ad exceſſum productorum OPS, ABC, minorem habet proportionem, quàm compoſita G, ad E, & produ-
Prop.2.3. cti ABC, ad vnitatem; ſed exceſſus productorum OPS, ABC, ad aggregatum productorum duorum laterum conſequentium inter Arithmeticè diſpoſitas præter A,S, habet proportionem compoſitam tùm 3.numeri laterum A B C, tùm etiam exceſſus D, ad vnitatem; qua etiam communi adiecta, productus ABCOPS, ad aggregatum productorum duorum laterum conſequentium præter A, S, habet minorem proportionem, quàm compoſita G, ad E, & producti ABC, ad vnitatem, necnon compoſita tùm numeri 3.tùm etiam exceſſus D, ad vnitatem; & eſt compoſita tùm producti ABC, tùm numeri 3.tùm etiam exceſſus D, ad vnitatem æqualis proportioni vnitatis ad G; quæ compoſita proportioni G, ad E, facit proportionem vnitatis ad E; ergo productus ABCOPS,

ad

Digitized by Google

ad aggregatum productorum duorum laterum conſequentium præter A, S; habet minorem proportionem, quàm vnitas ad E: ſed productus ABCOPS, ad aggregatum productorum duorum laterum conſequentium præter A, S, eſt vt vnitas ad aggregatum productorum duorum laterum conſequentium præter A, S, denominatum producto ABCOPS, quæ quidem fractio voceetur R; ergo vnitas ad R, habet minorem proportionem, quàm ad E; & propterea R, eſt maior E: tandem quot ſunt producti duorum laterum conſequentium præter A, S, totidem aſſumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum ordinatæ ſunt, & compoſitæ in E: conſtat R, eſſe aggregatum huiuſmodi aſſumptarum; & propterea R, eſſe portionem extenſionis E, maiorem, minoris; quod eſt abſurdum: non ergo E, minor eſt, neque maior; ergo idem eſt, quod ad vnitatem habet proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ABC, tùm ad 3. numerum laterum A B C, tùm etiam ad exceſſum D. Quod, &c. Prop.1.3.

Theor. 6. Prop. 6.

In facta diſpoſitione continua magnitudinum procedentium in infinitũ, differentiæ denominatæ planis diſpoſitæ; & aggregatæ infinitæ ſunt æquales vnitati denominatæ magnitudine, quæ eſt principium diſpoſitionis.

SIt diſpoſitio continua magnitudinum procedentium in infinitum ab A; & differentiæ denominatæ planis

A ——————————————— C ————
B ————————————————— F ———
D —— E —— G —— H ——

in huiuſmodi diſpoſitione ordinentur in infinitum, & componantur in B. Dico quòd B, ſunt æquales vnitati denominatæ per A. Sunt enim B, extenſionis finitæ: nam aſſumptis quotlibet à prima, & in denominatione vltimæ aſſumptarum adhibita C, vna ex diſpoſitis ab A:
Pr. 7. 1. conſtat aſſumptas æquales eſſe differentiæ C, A, denominatæ plano CA; & ad vnitatem ſe habere vt differentia C, A, ad planum C A; & conuertendo, vnitatem eſſe ad aſſumptas vt planum CA, ad differentiam C, A: ſed maiorem habet proportionem planum CA, ad differentiam C, A, quàm A, ad vnitatem; vel maiorem quàm vnitas ad vnitatem denominatam per A; ergo unitas ad aſſumptas maiorem habet proportionem quàm ad unitatem denominatam per A; & propterea quotlibet aſ-
Pr. 15. 1. ſumptæ ſunt minores vnitate denominata per A: ergo B, ſunt extenſionis finitæ. Igitur ſi B, non ſunt æquales vnitati denominatæ per A, neceſſariò maiores erunt, vel minores: ponantur maiores; & quoniam B, ſunt exten-
Pr. 16. 1. ſionis maioris vnitate denominata per A; ſumi poſſunt in aliqua multitudine à prima, vt impleant vnitatem denominatam per A; ſit huiuſmodi multitudinis numerus
Def. 10. D, qui adiecta vnitate fiat E; ergo B, ſumptæ in multitudine numeri E, ſunt maiores vnitate denominata per A; quod eſt contra ea, quæ ſuperius demonſtrata ſunt: non ergo B, ſunt maiores vnitate denominata per A.

Supponantur minores; & ſit defectus F; & ut F, ad unitatem denominatam per A, ita fiat A, ad G; & inter numeros diſpoſitos ab A, inueniatur C, numerus maior G; ergo C, ad A, maiorem habet proportionem quàm G, ad

by Google

G, ad A; uel quàm unitas denominata per A, ad F; & per conuerſionem rationis, & conuertendo, exceſſus C, A, ad C, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem denominatam per A; ſed C, ad planum AC, eſt ut unitas ad A, uel ut unitas denominata per A, ad unitatem; ergo ex æquali exceſſus C,A,ad planum AC,maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem: eſt autẽ exceſſus C, A, ad planum A C, ut exceſſus C, A, denominatus plano A C, ad unitatem; ergo exceſſus C A, denominatus plano AC, ad unitatem habet maiorem proportionem, quàm B, ad unitatem: Aſſumantur ex fractionibus diſpoſitis in B,tot ut inter aſſumptas habeatur ea, in cuius denominatione adhibetur magnitudo C; & aſſumptarum ſit aggregatum H: conſtat H, eſſe portionem B; & eſſe æqualem exceſſui C, A, denominato plano AC; & propterea H, ad unitatem habere proportionem maiorem quàm B; & H, maiorem eſſe B, partem toto; quod eſt abſurdum: non ergo B, ſunt minores unitate denominata per A; ſed neque maiores: ergo B, ſunt æquales unitati denominatæ per A. Quod, &c. Pr.7. 1.

Theor. 7. Prop. 7.

Diſpoſitis quomodolibet magnitudinibus procedentibus in infinitum, vt aſſumptis totidem ſemper ſecundùm aliquem numerum ſingula excedant ſingulas precedentes pariter totidem ſumptas ordinis eiuſdem; ex denominatione huiuſmodi exceſſuum ma-

gnitudinũ ordinis eiuſdem per productum tùm ex magnitudinibus, quarum ſunt exceſsus, tùm etiam ex intermedijs fiunt fractiones, quæ in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales vnitati denominatæ producto totidem magnitudinum, quæ ſunt in principio diſpoſitionis.



SIt A, diſpoſitio magnitudinnm in infinitum procedentium, ut ſumptis exempli gratia ternis quibuslibet, ſingulæ excedant ſingulas præcedentes ordins eiuſdem; & ſint primæ tres B, C, D; & quarta ſequens E; & ſit F, diſpoſitio infinitarum fractionum, in quibus prædicti exceſsus denominantur productis ex magnitudinibus tùm excedentibus, tùm intermedijs; quarum fractionum prima eſt exceſsus E, B, denominatus producto BCDE. Dico quod F, æqualis eſt unitati denominatæ producto BCD. Eſt enim F, extenſionis finitæ: nam aſſumptis in F, quotlibet à prima in denominatione ultimæ aſſumptarum adhibeantur O, P, R, S, magnitudines in A, diſpoſitæ; & ex ternis conſequentibus BCD, CDE, alijſq; deinceps diſpoſitis in A, utpote etiam ex PRS, fiant producti G, H, & deinceps alij, vtpote etiam V;
Pr. 1.3. quorum diſpoſitio in infinitum ſit I; conſtat aſſumptas æquales eſſe differentiæ V, G, denominatæ plano V, G, & ad vnitatem ſe habere vt differentia V, G, ad planum

G V;

Digitized by Google

G V; & conuertendo, vnitatem eſſe ad aſſumptas vt planum G V, ad differentiam V, G: ſed maiorem habet proportionem planum G V, ad differentiam V, G, quàm G, ad vnitatem; vel quàm vnitas ad vnitatem denominatam per G; ergo vnitas ad aſſumptas maiorem habet proportionem quàm ad vnitatem denominatam per G; & proptcrea quotlibet aſſumptæ ſunt minores vnitate denominata per G: ergo F, eſt finitæ extenſionis. Præterea differentiæ denominatæ planis in I, diſponantur in ſerie K; quarum prima eſt exceſſus H, G, denominatus plano G H: & quoniam magnitudines A, procedunt in infinitum; etiam producti earumdem I, procedunt in infinitum; ergo K, eſt extenſionis finitæ; & æqualis eſt vnitati denominatæ per G: & cum G, ſit productum B, in C D; & H, productum E, in C D; erit planum G H, productum B C D E, in C D: ergo G H, & planum G H, ſunt homologa rationis eiuſdem B, E, & producti B C D E: ergo exceſſus H, G, ad planum G H, eſt vt exceſſus E, B, ad productum B C D E; & fractio, in qua exceſſus H, G, denominatur plano G H, videlicet prima diſpoſitarum in K, æqualis eſt fractioni, in qua exceſſus E, B, denominatur producto B C D E, videlicet primæ diſpoſitarum in F: ſimiliter demonſtrabimus eaſdẽ ſingillatim magnitudines tùm in K, tùm in F, eſſe diſpoſitas, & ſunt ambæ diſpoſitiones K, & F, extenſionis finitæ, vt probauimus; ergo K, & F, congruunt inter ſe: cum ergo K, ſit æqualis vnitati denominatæ G, videlicet producto B C D; etiam F, eſt æqualis vnitati denominatæ producto B C D. Quod, &c.

Pr. 25. 1.

Pr. 15. 1.

Pr. 6. 3.

Ax. 2.

✠

Probl.

Probl. 1. Prop. 8.

Datis extremis inæqualibus, intermediam inuenire, cuius, & vnius extremarum differentia plano denominata ſit æqualis alij datæ magnitudini, quæ ſit minor differentia extremarum plano denominata.

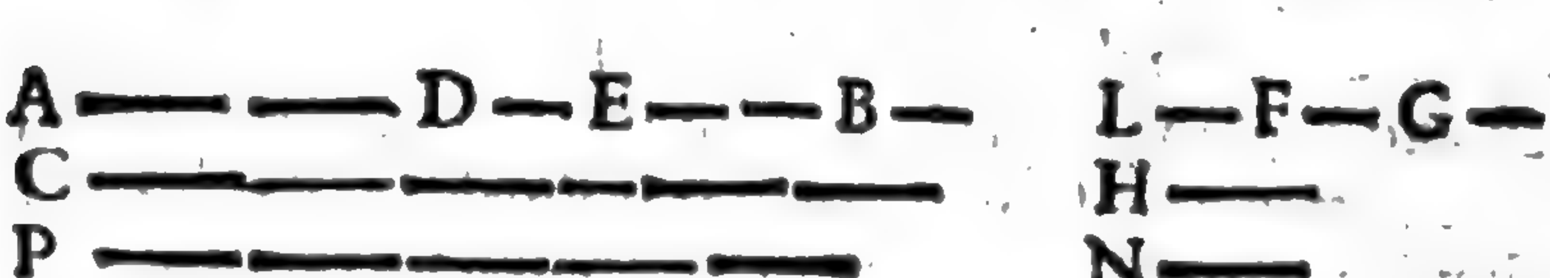
A. 8. G. 7. B. 3. E $\frac{1}{7}$ F. 1 $\frac{1}{7}$
D. $\frac{1}{56}$ H. $\frac{4}{21}$ C. $\frac{5}{24}$

DAtæ ſint inæquales extremæ A, B; quarum differentia plano denominata ſit C; & data ſit alia magnitudo D, minor C. Opportet extremas A, B, intermediam ihuenire; cuius, & A, differentia plano denominata ſit æqualis D. Vel eſt A, maior B; vel minor: ſit maior; & ex multiplicatione DA, fiat E; qui auctus vnitate ſit F; & per F, diuidendo A, fiat quotiens G. Dico, quòd G, eſt intermedia A, B, & quod exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D. Quoniam G, multiplicando F, producit A; & multiplicando aggregatum E, & vnitatis producit aggregatū plani GE, & G; eſt autem F, æqualis E, & vnitati; igitur A, eſt æqualis plano GE, & G; & A, eſt maior G; ergo communi ablata G, exceſſus A, G, eſt æqualis plano GE; & diuidendo per G, exceſſus A, G, denominatus per G, eſt æqualis E; videlicet plano DA; & diuidendo per A, exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D: non eſt autem G, æqualis, neque minor B; nam exceſſus A, G, plano denomi-

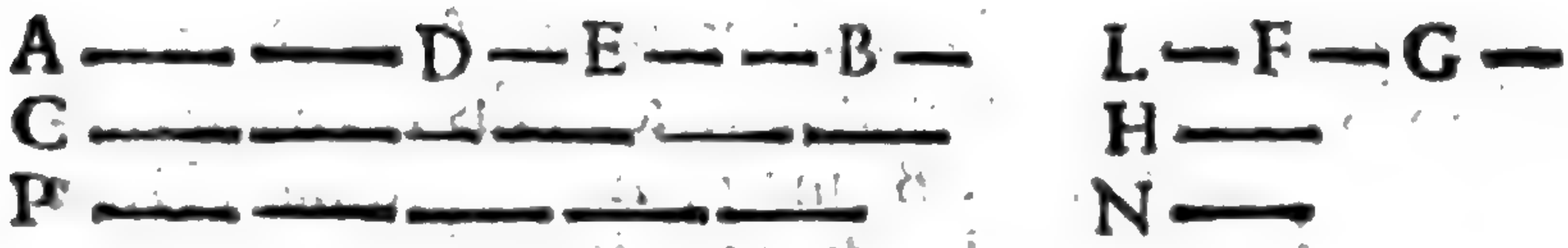
nominatus, videlicet D, æqualis eſſet vel maior C, contrà hipotheſim; ergo G, eſt intermedius A, B; & exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D. Sit A, minor B; & conuertendo, B, maior A; & quoniam D, eſt minor C; ſit defectus H, & inueniatur E, intermedius B, A, vt exceſſus B, E, plano denominatus æqualis fiat H: quoniam A, E, B, ſunt magnitudines continuè diſpoſitæ; aggregatum differentiarum A, E; E, B, planis denominatarum eſt æquale C; videlicet aggregato D, H; eſt autem differentia E, B, plano denominata æqualis H; ergo reſidua differentia, videlicet defectus A, E, plano denominatus eſt æqualis D. Quod, &c.

Theor. 8. Prop. 9.

In continua diſpoſitione magnitudinum infinitarum inter extremas quaſpiam magnitudines ab vna ad alteram procedentium, differentiæ planis denominatæ diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ, ſunt æquales vni differentiæ extremarum plano denominatæ.



SInt diſpoſitæ quomodolibet magnitudines infinitæ in continua diſpoſitione procedentes inter extremas



mas A, B, ab A, quæ ſit in principio diſpoſitionis ad B; & infinitæ differentiæ planis in diſpoſitione denominatę aggregentur in C; & ſit L, differentia A, B; & ex denominatione L, per planum A B, fiat H. Dico, quòd C, eſt æqualis H. Eſt enim C, extenſionis finitæ: nam aſſumptis in C, quotlibet à prima in denominatione vltimæ aſſumptarum adhibeantur D, E, magnitudines inter
Prop.7.1. A, B, diſpoſitæ: conſtat, quòd aſſumptæ ſunt æquales
Prop.7.1. differentiæ denominatæ plano AE; eſt autem differentia denominata plano AE, vnà cum differentia denominata plano E B, æqualis H; ergo differentia denominata plano A E, minor eſt H; & propterea quotlibet aſſumptæ
Pr.15.1. ſunt minores H: igitur C, eſt finitæ extenſionis. Iam ſi C, non eſt æqualis H, neceſſariò maior erit, vel minor: ſit maior; & quoniam C, eſt maioris extenſionis H; ſumi poſſunt ex magnitudinibus diſpoſitis in C, aliquot à prima, vt impleant H: ſumantur, & ſit ipſarum multi-
Def. 10. tudinis numerus F; qui vnitate adiecta fiat G; ergo C, ſumptæ à prima in multitudine numeri G, ſunt maiores H; quod eſt contrà ſuperius demonſtrata: non eſt ergo C, maior H. Sit minor; & inueniatur D, intermedia extremas A, B; vt differentia A, D, plano denominata ſit
Prop.8.3. æqualis C; ergo differentia A, D, eſt minor L: & quoniã ab A, ad B, ſunt diſpoſitæ magnitudines infinitæ; etiam differentiæ in ea diſpoſitione ſunt infinitæ; & ſimul compoſitæ ſunt æquales vni differentiæ extremarum L; ergo vel prima ex huiuſmodi differentijs eſt maior differentia
Pr. 16.1. A, D; vel ſi minor plures à prima ſumptæ ſecundùm aliquem numerum implent differentiam A, D; qui numerus

vnitate adiecta fiat N; ergo differentiæ in diſpoſitione A, ad B, ſumptæ à prima ſecundùm numerũ N, ſunt maiores differentia A, D: ſumantur igitur ſecundùm numerum N, magnitudines ab A, diſpoſitæ ad B, præter A; & aſſumptarum ſit vltima E; totidemque ſumantur ex fractionibus diſpoſitis in C; quarum aggregatum ſit P: conſtat P, eſſe portionem ipſius C; & differentiam A, E, maiorem differentia A, D; & propterea differentiam A, E, plano denominatam, videlicet P, eſſe maiorem differentia A, D, plano denominata, videlicet C; ergo portio eſt maior toto; quod eſt abſurdum: non eſt ergo C, minor H; ſed neque maior: ergo C, eſt æqualis H. Quod, &c. Prop.7.1:

Theor. 9. Propoſ. 10.

In continua diſpoſitione magnitudinum infinitarum inter extremas à prima ad vltimam procedentium, differentia illarum, quæ diſtant æquali ordinis interuallo denominata productis tùm earumdem, quarum ſunt differentia tùm etiam intermediarum, diſpoſita in infinitum, & aggregata ſunt æquales differentiæ inter productum numeri laterum vnitate minoris ab ijs, quæ ſunt in principio diſpoſitionis, & homogeneam poteſtatem ab vltima, denominata plano ſub ijſdem producto, & poteſtate.

A — I — K — M — O — S — T — D — E —— B —
C ————————————————————————
L —— F —— G ——   H ——
Q. V ———————— X — Z ———— R —
Y —— N ——   P ————

Sint diſpoſitæ quomodolibet magnitudines infinitæ
in continua diſpoſitione procedentes inter extremas
A, B ab A, I, K, M, O, quæ ſint in principio diſpoſitio-
nis ad B; & infinitæ differentiæ illarum, quæ diſtant
æquali ordinis interuallo, vtpote ſemper binis relictis
differentiæ A, M; I, O, &c. denominatæ productis
AIKM, IKMO, &c. aggregentur in C; & ſit Q diſpo-
ſitio productorum numeri laterum vnitate minoris AIK,
IKM, KMO, &c. in qua quidem diſpoſitione ſit V, pro-
ductum AIK; & R, poteſtas totidem laterum à B; diffe-
rentia verò R, V, ſit L; ex cuius denominatione per pla-
num RV, fiat H. Dico quod C, eſt æqualis H. Eſt enim
C, extenſionis finitæ; nam aſſumptis in C, quotlibet à
prima, in denominatione vltimæ aſſumptarũ adhibean-
tur S, T, D, E, magnitudines inter A, B, diſpoſitæ; & in
Prop. 1. 3. diſpoſitione Q, ſint X, Z, producta STD, TDE; conſtat,
quòd aſſumptæ ſunt æquales differentiæ denominatæ
Prop. 7. 1. plano VZ; eſt autem differentia denominata plano VZ,
vnà cum differentia denominata plano ZR, æqualis H;
ergo differentia denominata plano VZ, minor eſt H; &
propterea quotlibet aſſumptæ à prima ex diſpoſitis in C,
Pr. 15. 1. ſunt minores H: igitur C, eſt finitæ extenſionis. Iam ſi
C, non eſt æqualis H; neceſſariò maior erit, vel minor:
Pr. 16. 1. ſit maior; & quoniam C, eſt maioris extenſionis H; ſumi
poſſunt ex magnitudinibus diſpoſitis in C, aliquot à pri-
ma, vt impleant H: ſumantur, & ſit ipſarũ multitudinis
Def. 10. numerus F; qui vnitate adiecta fiat G; ergo C, ſumptæ à
prima in multitudine numeri G, ſunt maiores H, quod eſt

contrà

Digitized

contrà ſuperiùs demonſtrata: nõ eſt ergo C, maior H. Sit minor; & inueniatur X, intermedia extremas V, R, vt differentia V, X, plano denominata ſit æqualis C; & intelligãtur V, X, eſſe poteſtates ipſi R, homogeneæ, quarũ radices inueniantur Y, S: quia V, eſt productus magnitudinũ inæqualium, & continuè diſpoſitarum A, I, K; conſtat quòd Y, eſt intermedia extremas A, K; & quia X, eſt intermedia extremas V, R; differentia V, X, eſt minor differẽtia, V, R; & differẽtia Y, S, minor eſt differẽtia Y, B; & ablata communi differentia Y, K; differẽtia K, S, minor eſt differentia K, B: & quoniã in diſpoſitione K, ad B, ſunt magnitudines infinitæ; etiam differentiæ ſunt infinitæ; & ſimul ſumptæ ſunt æquales vni differentiæ extremarum K, B; ergo vel prima ex huiuſmodi differentijs eſt maior differentia K, S; vel ſi minor, plures à prima ſumptæ ſecundum aliquem numerum implent differentiam K, S; qui numerus vnitate adiecta fiat N; ergo differentiæ in diſpoſitione K, ad B, ſumptæ à prima ſecundum numerum N, ſunt maiores differentia K, S: Sumantur ergo ſecundum numerum N, magnitudines à K, diſpoſitæ ad B, præter K; & aſſumptarum ſit vltima T; quam ſequantur aliæ duæ D, E; & in diſpoſitione Q, ſit Z, productum TDE; & quot ſunt magnitudines aſſumptæ à K, vſque ad E, totidem ſumantur ex fractionibus diſpoſitis in C, à prima; quarum aggregatum ſit P: conſtat P, eſſe portionem ipſius C; & differentiam K, T, eſſe maiorem differentia K, S; & addita communi differentia Y, K, differentiam Y, T, maiorem differentia Y, S; & propterea differentiam inter V, & homogeneam poteſtatem à radice T, maiorem differentia V, X; eſt autem differentia V, Z, maior differentia inter V, & homogeneam poteſtatem à radice T; ergo differentia V, Z, eſt multò maior differentia V, X, & ideò differentia V, Z, plano denominata maior eſt differentia V, X, plano denominata; videlicet

Prop. 8. 3.

Pr. 16. 1.

Def. 10.

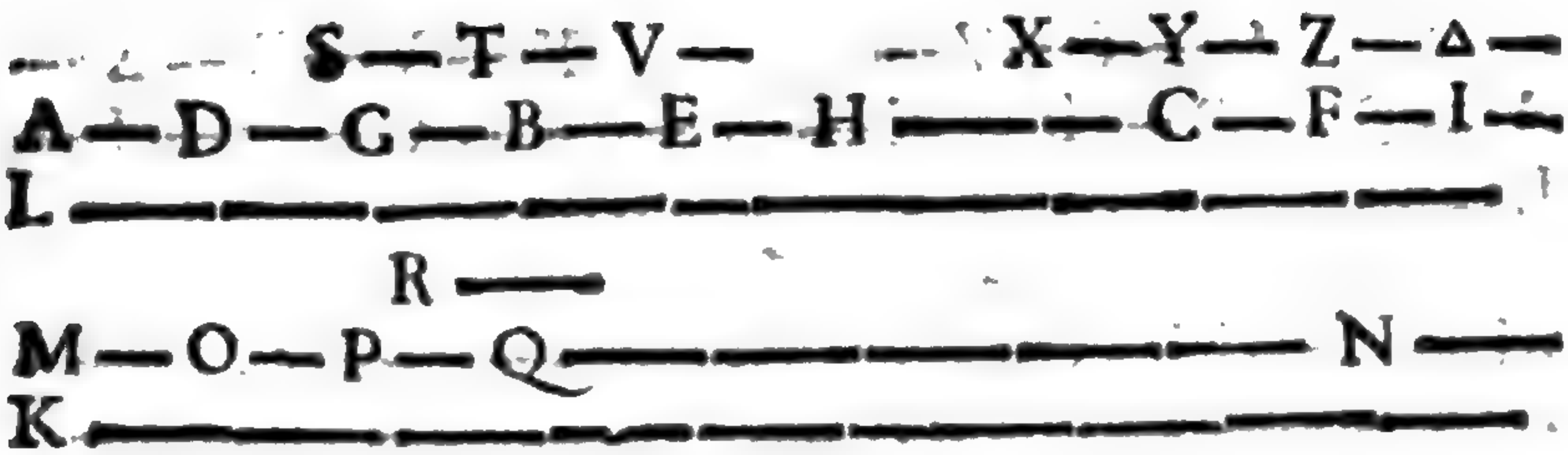
Prop. 7. 1.

fractione C: eſt autem differentia V,Z, plano denominata æqualis P; ergo P, eſt maior C, portio toto; quod eſt abſurdum: non eſt ergo C, minor H; ſed neque maior: ergo C, eſt æqualis H. Quod, &c.

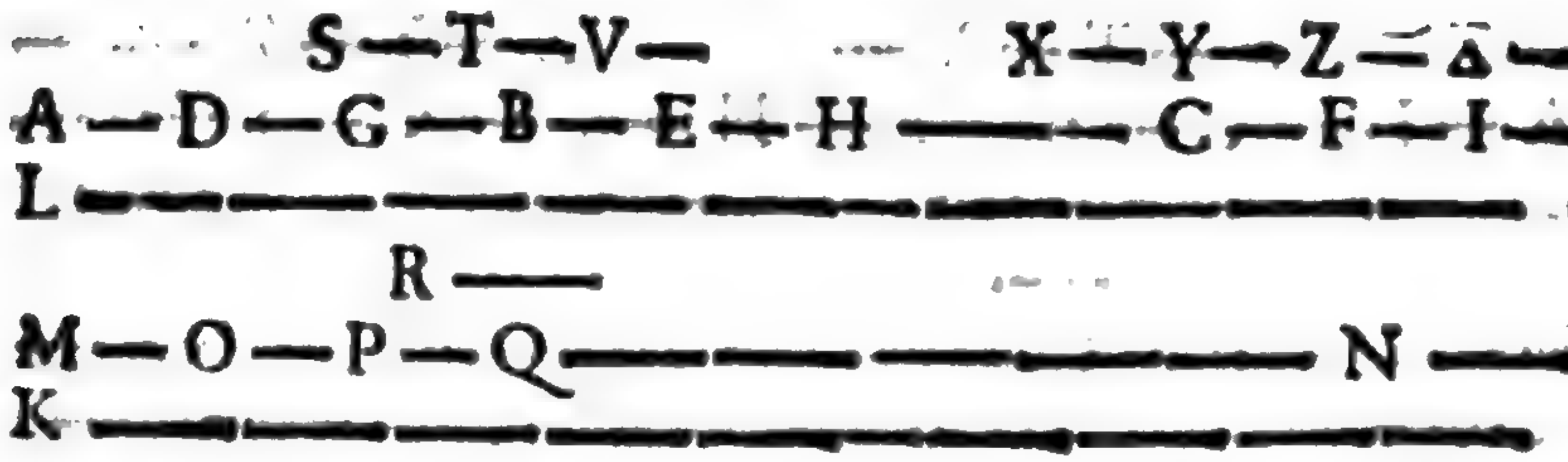
Theor. 10. Prop. 11.

Si plures continuæ diſpoſitiones, in quibus differentiæ ſint ſimiles, magnitudinum infinitarum ità componantur in vnica diſpoſitione, vt quæ ſunt ordinis eiuſdem ſint ſimiliter ordinatæ; differentiæ in ſingulis diſpoſitionibus eodem ordine ſumptæ, cum ijs, quæ ſunt in ipſarum diſpoſitionum principijs, denominatæ productis tùm earumdem, quarum ſunt differentiæ, tùm etiam intermediarum diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales vni differentiæ productorum à primis, & ab vltimis extremis, eorumdem productorum plano denominatæ.

TRium continuarum diſpoſitionum ex magnitudinibus infinitis inter binas extremas procedentium prima ſit ab A, per B, ad C; ſecunda à D, per E, ad F, tertia à G, per H, ad I; in quibus differentiæ ſint ſimiles, & quæ



& quæ componantur in vna diſpoſitione ab A, per D, G, B, &c. ad I, ità vt primæ A, D, G, ſecundæ B, E, H, & reliquæ deinceps ordinis eiuſdem, necnon vltimæ C, F, I, ſint ſimiliter ordinatæ; & ſingularum diſpoſitionum differentiæ denominatæ productis in huiuſmodi compoſita diſpoſitione (vtpote differentia A, B, denominata producto ADGB; & differentia D, E, producto DGBE; & ſic deinceps in infinitum) diſponantur, & colligantur in L; & à primis ADG, & vltimis CFI, producantur M, & N. Dico, quòd L, eſt æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Eſt enim L, extenſionis finitæ: nam aſſumptis in L, quotlibet à prima, in denominatione vltimæ aſſumptarum tres adhibeantur B, E, H, magnitudines inter A, I, diſpoſitæ; & Q, ſit productum BEH; & quoniam ſunt continuæ diſpoſitiones ABC, DEF, GHI; Ex Dem.
continua eſt etiam diſpoſitio MQN; & differentia M, Q, Prop.1.3.
minor eſt differentia M, N; & differentia M, Q, plano Prop.7.1.
denominata minor eſt differentia M, N, plano denominata: eſt autem differentia M, Q, plano denominata Prop.1.3.
æqualis quotlibet aſſumptis in L; igitur quotlibet aſſumptæ in L, ſunt minores differentia M, N, plano denominata; ergo L, eſt finitæ extenſionis. Inter M, N, diſpo- Pr.15.1.
nantur homogenea producta in diſpoſitione ab A, ad I, vt fiant O, P, Q, producta DGB, GBE, BEH, & deinceps infinita; & eadem demonſtratione, qua oſtendimus Q, eſſe intermedium M, N; oſtendemus etiam O, P, &



reliqua producta eſſe intermedia M,N; necnon O,P,eſſe intermedia M, Q; & ſic diſpoſitionem huiuſmodi productorum inter M, N, eſſe continuam: ſumatur præterea quælibet magnitudo R, inter M, N; & analogia (videlicet proportionum proportio) proportionis M, ad N, ad proportionem M, ad R, eadem eſſe concipiatur ſingularum proportionum A, ad C; D, ad F; & G, ad I, ad ſingulas proportiones A, ad S; D, ad T; & G, ad V, poſſibiles inueniri: & quoniam R, eſt inter M, N; ſi ſingulæ A, D, G, ſingulis C, F, I, ſunt minores; ergo M, eſt minor N; & minor eſt proportio M, ad N, quàm M, ad R; & ſingulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, ſunt minores quàm ſingulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: ſunt ergo ſingulæ C, F, I, ſingulis S, T, V, maiores: ſunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & ſingularum A, D, G, ad ſingulas C, F, I, minoris inæqualitatis; ergo etiam proportiones ſingularum A, D, G, ad ſingulas S, T, V, ſunt minoris inæqualitatis; & ſingulæ A, D, G, ſingulis S, T, V, minores. Si verò ſingulæ A, D, G, ſingulis C, F, I, ſunt maiores; ergo M, eſt maior N; & maior eſt proportio M, ad N, quàm M, ad R; & ſingulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, ſunt maiores, quàm ſingulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: ſunt ergo ſingulæ C, F, I, ſingulis S, T, V, minores: ſunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & ſingularum A, D, G, ad ſingulas C, F, I, maioris inæqualitatis; ergo propor-

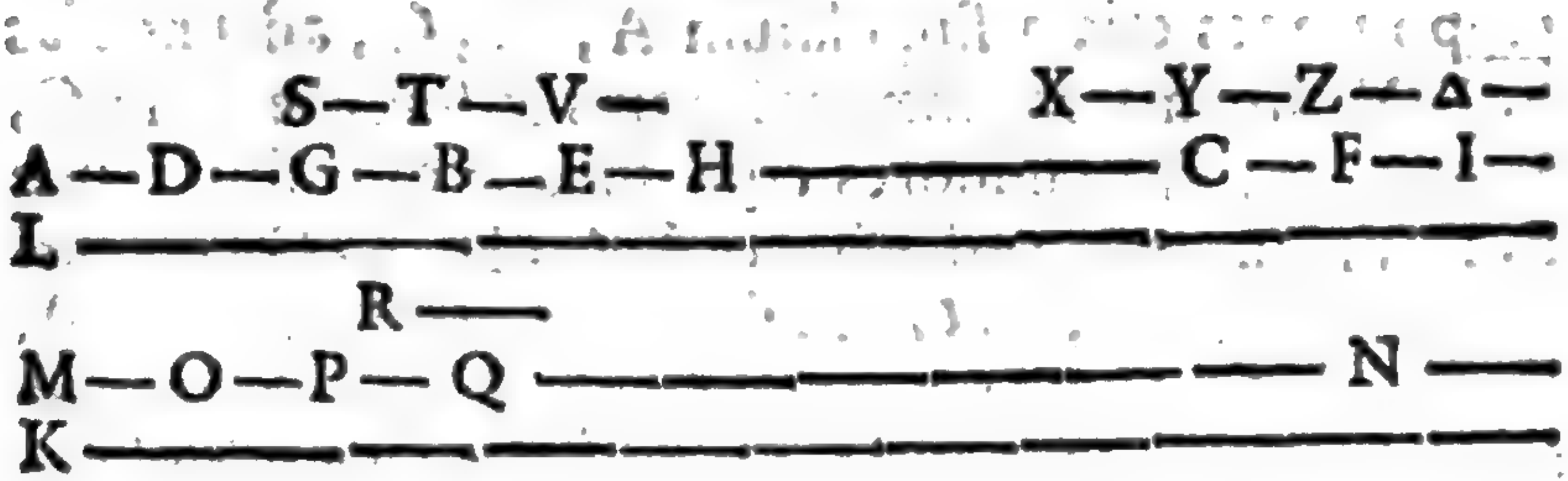
Ex doctrina Logarithmorũ.

Digitized by Google

proportiones etiam ſingularum A, D, G, ad ſingulas S, T, V, ſunt maioris inæqualitatis; & ſingulæ A, D, G, ſingulis S, T, V, minores ergo in vtroq; caſu ſingulæ S, T, V, ſunt intermediæ binas A, C; D, F; G I; & differentiæ A, S; D, T; G, V, ſunt minores differentijs A, C; D, F; G, I; & quoniam in ſingulis diſpoſitionibus ab A, ad C; à D, ad F; à G, ad I, ſunt magnitudines infinitæ; etiam differentiæ ſunt infinitæ; & ſimul compoſitæ ſingulis extremarum differentijs A, C; D, F; G, I, ſunt æquales; ergo vel primæ differentiæ in ſingulis huiuſmodi diſpoſitionibus differentijs A, S; D, T; G, V, ſunt maiores; vel ſi minores, plures à primis aſſumptæ ſecundùm aliquos numeros implent differentias A, S; D, T; G, V; qui numeri ſingulis vnitatibus adiectis fiant X, Y, Z; quorum numerorum ſit maximus Y; cuius fiat multiplex △, iuxtà numerum magnitudinum A, D, G: ergo differentiæ in ſingulis diſpoſitionibus A, ad C; D, ad F; G, ad I, ſumptæ à primis iuxtà ſingulos numeros X, Y, Z, ſunt maiores differentijs A, S; D, T; G, V; & ſumptæ iuxtà numerum Y, ſunt multò maiores ijſdem differentijs A, S; D, T; G, V: igitur ſumantur ſecundùm numerum Y, magnitudines ab A, diſpoſitæ ad C; à D, ad F; à G, ad I, poſt ipſas A, D, G; & aſſumptarum ſint vltimæ B, E, H; quæ cum ſint ordinis eiuſdem reperientur in diſpoſitione ab A, ad I, conſequentes; & poſt eaſdem A, D, G, in ordine numeri △, & aliorum deinceps numerorum, qui ſunt proximè maiores ipſo △; & pariter in diſpoſitione productorum ab M, ad N, reperietur ipſorum BEH, productus Q, in eodem ordine numeri △, poſt M: quia ſingulę differentię A, B; D, E; G, H, ſunt ſingulis differentijs A, S; D, T; G, V, maiores; etiam differentia M, Q, maior eſt differentia inter M, & productum S T V: & quia ſingulę proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, ad ſingulas proportiones

Pr.16. 1.

Def. 10.



tiones A, ad S; D, ad T; G, ad V; & colligendo omnes ad omnes eamdem habent analogiam (ſiue proportionum proportionem) quæ eſt proportionis M, ad N, ad proportionem M, ad R; permutandoque, & conuertendo, ſicut proportio M, ad N, æqualis eſt proportionibus A, ad C; D, ad F; G, ad I, ita proportio M, ad R, æqualis eſt proportionibus A, ad S; D, ad T; G, ad V; videlicet proportioni M, ad productum STV: ergo R, eſt æqualis producto STV; & differentia M, Q, maior eſt differentia M, R; ergo diſpoſitio productorum M, O, P, Q, eſt continua magnitudinum infinitarum procedentium ab M, ad N: in continua ergò diſpoſitione magnitudinum infinitarum inter extremas quaſpiam magnitudines ab M, ad N, procedentium, differentiæ planis denominatæ diſponantur in infinitum, & aggregentur in K; ergo K, eſt æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ: & quoniam M, eſt productum A, in DG; & O, productum B, in DG; erit planum MO, productum ADGB, in DG; ergo M, O, & planum MO, ſunt homologa rationis eiuſdem A, B, & producti ADGB; ergo differentia M, O, ad planum MO, eſt vt differentia A, B, ad productum ADGB; & fractio, in qua differentia M, O, plano denominatur; videlicet prima diſpoſitarum in K, eſt æqualis fractioni, in qua differentia A, B, denominatur producto ADGB; videlicet primæ diſpoſitarum in L: ſimiliter demonſtrabimus eaſdem ſin-

Prop. 9. 3

gillatim

gillatim magnitudines tùm in K, tùm in L, eſſe diſpoſitas; & ſunt ambæ diſpoſitiones K, & L, extenſionis finitæ, vt probauimus; ergo K, & L, congruunt inter ſe: cum ergo K, ſit æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ; etiam L, eſt æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Quod, &c. Ax. 2.

DEFINITIONES.

Expoſita rationali, & datis quotlibet, ſi rationalis ad aliam, quæ inuenitur habeat proportionem compoſitam ex proportionibus eiuſdem rationalis ad ſingulas datas; vocetur inuenta, productus datarum.

Et datæ lineæ, dicatur latera, producti.

Expoſita rationali, & datis duabus alijs magnitudinibus; ſi vt prima datarum ad rationalem, ita fiat ſecunda ad aliam, quæ inuenitur; vocetur inuenta, fractio facta ex denominatione ſecundæ per primã.

Et ipſa ſecunda magnitudo, numerator fractionis.

Prima verò, denominator.

Et expoſita rationalis, vnitas appelletur.

Huiu-

Digitized by Google

Huiuſmodi definitiones in Arithmetici voluminis calce appoſitas eſſe volui, vt faciliter quiſq; poſſit Arithmetica Theoremata in Geometricos vſus conuertere, & demonſtrationes in quantitate diſcreta expoſitas, in quantitate continua mutatis nominum interprætationibus adhibere.

Finis Libri Tertij.

A01146137 5

Digitized by Google

Omnium calculis approbandam, immò albis ſignandam lapillis Arithmeticam hanc Speculationem cenſuit Ouidius Montalbanus librorum Mathematicorum pro Eminentiſs & Reuerendiſs Principe Archiepiſcopo Bononiæ Card. Nicolao Ludouiſio Cenſor.

V. D. Antonius Bon Vicinus Panit. pro eodem Eminentiſs.

Bartholomæus Maſſarius Lib. Mathm. reuiſor pro Reuerendiſs. P. Inquiſit.

Imprimatur

Fr. Vincentius Pratus à Serraualle Inquiſit. Bononiæ.



BONONIAE Typis Iacobi Montij. MDCL.
Superiorum permiſſu.

Digitized by Google

A01 164375

Digitized by Google